Министерство образования и науки Самарской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение

Самарской области

«САМАРСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

(ГБПОУ «СЭК»)

Т.Н. Андрюхина, Н.Д. Путилова

ОДП.01 МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА; ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие для выполнения практических работ

для студентов всех специальностей

Самара 2017

Учебно-методическое пособие для выполнения практических работ по дисциплине *ОДП.01 Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия* для студентов I курсов всех специальностей/ авт. Андрюхина Т.Н., Путилова Н.Д. – Самара: ГБПОУ «СЭК», 2017 – 119 с.

Издание содержит теоретические сведения и методические рекомендации к выполнению практических работ по дисциплине *ОДП.01 Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия* для студентов I курсов всех специальностей. Составлено в соответствии с примерной программой общеобразовательной учебной дисциплины *Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия*.

Рассмотрено и рекомендовано к изданию методическим советом ГБПОУ «СЭК» (протокол № 6 от 22.09.2016 г.)

Рецензент:

Глебова И.Н. – преподаватель государственного бюджетного профессионального образовательного учреждения Самарской области «Самарский энергетический колледж»

Замечания, предложения и пожелания направлять в ГБПОУ «Самарский энергетический колледж» по адресу: 443001, г. Самара, ул. Самарская 205-А или по электронной почте info@sam-ek.ru

ВВЕДЕНИЕ

Программа учебной дисциплины *Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия* является частью общеобразовательного цикла образовательной программы СПО.

Реализация содержания учебной дисциплины предполагает соблюдение принципа строгой преемственности по отношению к содержанию курса *Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия* на ступени основного общего образования.

Планируемые предметные результаты освоения учебной дисциплины:

- сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;
- сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
- владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;
- использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
- сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;
- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах;
- сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире;
- применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
- сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей;
- умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;
- владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел1 Развитие понятия о числе	***Практическое занятие 1*** Приближенные вычисления. ***Практическое занятие 2*** Комплексные числа.
Раздел 2 Функции, их свойства и графики	***Практическое занятие 3*** Преобразования графика функции. ***Практическое занятие 4*** Показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения и системы
Раздел 3 Корни, степени и логарифмы.	***Практическое занятие 5*** Арифметические действия над числами, нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной), сравнение числовых выражений. ***Практическое занятие 6*** Вычисление и сравнение корней. Выполнение расчетов с радикалами. ***Практическое занятие 7*** Решение иррациональных уравнений. Нахождение значений степеней с рациональными показателями. Сравнение степеней. Преобразования выражений, содержащих степени. Решение показательных уравнений. ***Практическое занятие 8*** Решение прикладных задач. ***Практическое занятие 9*** Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому. Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений. ***Практическое занятие 10*** Приближенные вычисления и решения прикладных задач. ***Практическое занятие11*** Решение логарифмических уравнений.
Раздел 4 Основы тригонометрии	***Практическое занятие 12*** Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой. История тригонометрии ***Практическое занятие 13*** - Построение графиков функций, заданных различными способами. - Основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение, преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства. ***Практическое занятие 14*** Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс.
Раздел 5 Прямые и плоскости в пространстве	***Практическое занятие 15*** Признаки взаимного расположения прямых. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. ***Практическое занятие 16*** Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей. ***Практическое занятие 17 – 26*** Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве. ***Практическое занятие 18*** Параллельное проектирование и его свой-

	ства. Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника. Взаимное расположение пространственных фигур. ***Практическое занятие 19*** Векторы. Действия с векторами. Декартова система координат в пространстве.
Раздел 6 Координаты и векторы в пространстве	***Практическое занятие 20*** Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения, развертки многогранников. Площадь поверхности. Виды симметрий в пространстве. Симметрия тел вращения и многогранников. Вычисление площадей и объемов. ***Практическое занятие 21*** Уравнение окружности, сферы, плоскости. Расстояние между точками. Действия с векторами, заданными координатами. Скалярное произведение векторов. Векторное уравнение прямой и плоскости. Использование векторов при доказательстве теорем стереометрии.
Раздел 7 Многогранники	***Практическое занятие 22*** Числовая последовательность, способы ее задания, вычисления членов последовательности. Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. ***Практическое занятие 23*** Производная: механический и геометрический смысл производной. ***Практическое занятие 24*** 1. Нахождение производных сложных функций вида f(ax+d) 2. Уравнение касательной в общем виде. Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций. Исследование функции с помощью производной. Нахождение наибольшего, наименьшего и экстремальных значений функции. ***Практическое занятие 25*** Интеграл и первообразная. Теорема Ньютона - Лейбница. Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей. ***Практическое занятие 26*** Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве.
Раздел 8 Тела и поверхности вращения	***Практическое занятие 27*** История развития комбинаторики, теории вероятностей и статистики и их роль в различных сферах человеческой жизнедеятельности. Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач. Размещения, сочетания и перестановки. Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Прикладные задачи.
Раздел 9 Начала математического анализа	***Практическое занятие 28*** Классическое определение вероятности, свойства вероятностей, теорема о сумме вероятностей. Вычисление вероятностей. Прикладные задачи. Представление числовых данных. Прикладные задачи.
Раздел 10 Измерения в геометрии	***Практическое занятие 29*** Корни уравнений. Равносильность уравнений. Преобразование уравнений. ***Практическое занятие 30*** Основные приемы решения уравнений. Решение систем уравнений. ***Практическое занятие 31*** Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств.

Практическое занятие 1 Приближенные вычисления

Цель занятия: научиться находить погрешности приближенного вычисления.

Теоретическая часть

Приближенным числом или приближением называется число, незначительно отличающееся от точного значения величины и заменяющее его в вычислениях. Под погрешностью же принято понимать разность между абсолютным значением и его приближением.

Для правильного понимания подходов и критериев, используемых при решении прикладной задачи с применением ЭВМ, важно понимать, что получить точное значение решения практически невозможно. Получаемое на ЭВМ решение почти всегда (за исключением некоторых весьма специальных случаев) содержит погрешность, т.е. является приближенным. Невозможность получения точного решения следует уже из ограниченной разрядности вычислительной машины.

Наличие погрешности обусловлено рядом весьма глубоких причин:

1. Математическая модель является лишь приближенным описанием реального процесса. Характеристики процесса, вычисленные в рамках принятой модели, заведомо отличаются от истинных характеристик, причем их погрешность зависит от степени адекватности модели реальному процессу.
2. Исходные данные, как правило, содержат погрешности, поскольку они либо получаются в результате экспериментов (измерений), либо являются результатом решения некоторых вспомогательных задач.
3. Применяемые для решения задачи методы в большинстве случаев являются приближенными. Найти решение возникающей на практике задачи в виде конечной формулы возможно только в отдельных, очень упрощенных ситуациях.
4. При вводе исходных данных в ЭВМ, выполнении арифметических операций и выводе результатов на печать производятся округления.

Точное значение величины — это значение, не содержащее погрешности. Повышение точности воспринимается как уменьшение погрешности. Часто используемая фраза "требуется найти решение с заданной точностью" означает, что ставится задача о нахождении приближенного решения, принятая мера погрешности которого не превышает заданной величины. Вообще говоря, следовало бы говорить об абсолютной точности и относительной точности, но часто этого не делают, считая, что из контекста ясно, как измеряется величина погрешности.

Если вместо точного числа мы берем приближенное число, то это последнее называется приближением с недостатком, если оно меньше точного числа, и с избытком, если оно больше его. Разность между точным числом и его приближением называется погрешностью этого приближения.

Пример 1.

Точное число есть 3,826 и мы вместо этого числа взяли 3,82, то это будет приближение с недостатком, причем погрешность равна 0,006;

Если же вместо 3,826 возьмем, положим, 3,83, то будем иметь приближение с избытком, причем погрешность окажется 0,004.

Обыкновенно точная величина погрешности остается неизвестной, а известно только, что она меньше некоторой дроби.

Пример 2. Меньше $^1/_{100}$. Тогда говорят, что приближение точно до $^1/_{100}$.

Известно, что 2,85 есть приближение числа ***A*** с точностью до $^1/_{100}$. Это значит, что 2,85 разнится от ***A*** меньше, чем на $^1/_{100}$, так что если 2,85 есть приближение с недостатком, то точное число ***A*** заключается между 2,85 и 2,86, а если 2,85 есть приближение с избытком, то ***A*** заключается между 2,85 и 2,84. Если же остается неизвестным, будет ли приближение 2,85 с недостатком или с избытком, а известно только, что оно точно до $^1/_{100}$, то о числе ***A*** мы можем только утверждать, что оно заключается между 2,84 и 2,86.

Погрешность, о которой мы сейчас говорили, называется абсолютною погрешностью в отличие от относительной погрешности, под которою разумеют отношение абсолютной погрешности к точному числу.

Пример 3. Если вместо точного числа 3,826 мы берем приближенное 3,82, то относительная погрешность будет 0,006: 3,820 = 6:3826 = 0,001568..., т. е. менее 0,002. Это значит, что, взяв приближение 3,82, мы ошиблись менее, чем на 0,002 точного числа.

Иногда относительную погрешность выражают в процентах точного числа, т. е. указывают, что погрешность менее стольких-то процентов точного числа.

Пример 4. Так, если относительная погрешность менее 0,002 точного числа, то это значит, что она менее 0,2% этого числа, так как $0{,}002 = 0{,}002 \cdot 100\% = 0{,}2\%$

Пусть имеется некоторая числовая величина, и числовое значение, которое ей присвоено, считается точным (x), тогда под погрешностью приближенного значения числовой величины (ошибкой) Δa понимают разность между точным и приближенным (a) значением числовой величины: $x - a = \Delta a$

Погрешность может принимать как положительное, так и отрицательное значение. Величина называется (a) известным приближением к точному значению числовой величины – любое число, которое используется вместо точного значения. Простейшей количественной мерой ошибки является абсолютная погрешность.

Абсолютной погрешностью приближенного значения (a) называют величину Δa, про которую известно, что: $|x - a| \le \Delta a$.

Качество приближения существенным образом зависит от принятых единиц измерения и масштабов величин, поэтому целесообразно соотнести погрешность величины и её значение, для чего вводится понятие относительной погрешности. Относительной погрешностью приближенного значения называют величину $\delta(a^*)$, про которую известно, что: $\dfrac{\Delta a}{|x|} = \delta$.

Относительную погрешность часто выражают в процентах. Использование относительных погрешностей удобно, в частности, тем, что они не зависят от масштабов величин и единиц измерения. Так как точное значение обычно неизвестно, то непосредственное вычисление величин абсолютной и относительной погрешностей по предложенным формулам невозможно. Более реальная и часто поддающаяся решению задача состоит в получении оценок погрешности вида:

$$|x-a| \le \Delta a\,;\ \frac{\Delta a}{|x|} = \delta\,.$$

где Δa и δ – известные величины, которые называют верхними границами (или просто границами) абсолютной и относительной погрешностей.

Для округления десятичной дроби до какого-нибудь заданного разряда нужно знать, какая цифра следует за этим разрядом. Если за разрядом следует любая из цифр от 0 до 4, то все цифры, следующие за разрядом, отбрасывают.

Пример 5. Округляя до сотых число 5,7432, получим 5,74.

Если за разрядом следует любая из цифр от 5 до 9, то цифра разряда увеличивается на единицу, а все следующие за ней цифры отбрасываются.

Пример 6. Округляя до сотых число 5,7463, получим 5,75.

Контрольные вопросы

1. Что называется абсолютной погрешностью?
2. Что называется относительной погрешностью?

Практическая часть

1. Найдите относительную погрешность:

$$x = \frac{5}{3},\ a = 1{,}6$$

2. Найдите относительную погрешность:

$$x = \frac{3}{11},\ a = 0{,}273$$

3. Определите, какое равенство точнее:

$$\sqrt{15} = 3{,}87 \text{ или } \frac{7}{12} = 0{,}583$$

4. Определите, какое равенство точнее:

$$\sqrt{14} = 3{,}74 \text{ или } \frac{5}{12} = 0{,}417$$

5. Число различных конфигураций кубика Рубика записывается 20-значным числом 43252003274489856000.

Строя новую конфигурацию за одну секунду, за сколько веков можно перебрать все конфигурации?

6. Туманность Андромеды отстоит от Земли на 2300000 световых лет. Найдите приближенное расстояние от Земли до туманности Андромеды в километрах.

7. Изобразите на числовой оси следующие числа: 3,5; -2,2; $\sqrt{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5}{3}$.

8. Округлите с точностью до второго знака: x =1,1683; x = 0,2309; x =$\sqrt{2}$;
x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; x = π^2

Практическое занятие 2 Комплексные числа

Цель занятия: познакомиться с понятием комплексного числа, определением модуля и свойствами комплексных чисел.

Теоретическая часть

1 Определение комплексного числа

Комплексным числом называется выражение вида

$$a + bi,$$

где a и b – произвольные вещественные числа, а i – специальный символ [3].

Вещественные числа a и b называют соответственно вещественной и мнимой частями комплексного числа $z = a + bi$.

Комплексное число, у которого мнимая часть равна нулю, т. е. комплексное число вида $a + 0i$ записывают в виде a и отождествляют с вещественным числом a. Обозначение: $a = \text{Re } z$, $b = \text{Im } z$.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_{1i}$ и $z_2 = a_2 + b_{2i}$ считают равными тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части:

2 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Комплексные числа можно поставить во взаимно однозначное соответствие с парами вещественных чисел: $a + bi$ $(a; b)$.

Это подсказывает геометрическую интерпретацию комплексных чисел – если мы введем на плоскости систему координат, то можно сопоставить каждому комплексному числу $z = a + bi$ точку плоскости $M(a; b)$ с координатами a и b. Это сопоставление будет взаимно однозначным, т. е. каждой точке плоскости M с координатами (a, b) мы можем сопоставить комплексное число $a + bi$. Так же как вещественное число мы отождествляем с соответствующей точкой числовой оси, мы можем отождествить комплексное число с точкой плоскости.

Поэтому можно сказать: рассмотрим точку $z = 1 + i$, понимая под этим, что мы рассматриваем точку плоскости с координатами (1; 1).

Вся плоскость называется ***комплексной плоскостью***.

Вещественные числа, рассматриваемые как часть комплексных чисел, занимают ось абсцисс координатной плоскости (вещественная ось).

Числа вида $0 + bi$, которые записывают в виде bi, занимают ось ординат (мнимая ось).

Множество всех комплексных чисел обозначают буквой C.

3 Действия над комплексными числами в алгебраической форме

3.1 Сложение комплексных чисел

Суммой комплексных чисел z1 = a1 + b1i и z2 = a2 + b2i называется комплексное число $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, т. е. при сложении комплексных чисел складываются их вещественные и мнимые части.

Для сложения комплексных чисел выполняются обычные арифметические законы.

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – коммутативный, или переместительный, закон сложения.

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – ассоциативный, или сочетательный, закон сложения.

3) Число $0 = 0 + 0i$ играет роль нуля: $z + 0 = 0 + z = z$.

4) Для числа $z = a + bi$ число $(–z) = –a – bi$ играет роль противоположного числа: $z + (–z) = (–z) + z = 0$.

Эти законы выполняются для вещественных чисел. Их проверка для комплексных чисел выполняется без затруднений, так как при сложении комплексных чисел их вещественные и мнимые части «не перемешиваются».

3.2 Геометрическая интерпретация сложения

Сложение комплексных чисел допускают наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть даны два положительных числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$. Им соответствуют точки $M_1(a_1; b_1)$ и $M_2(a_2; b_2)$.

Сумма чисел $z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ соответствует точке M, координаты которой равны сумме координат точек M_1 и M_2. Это означает, что сложение комплексных чисел соответствует правилу параллелограмма для сложения векторов:

3.3 Умножение комплексных чисел

Умножение комплексных чисел производится по следующему правилу:

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

Запишем число $0 + 1i$ как i.

По определению умножения $i^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 – 1) + (0 – 0)i = –1$, поэтому число i называют мнимой единицей.

Заметим, что квадраты вещественных чисел (именно с ними мы имели дело до сих пор) всегда неотрицательны.

Определение умножения комплексных чисел можно дать также следующим образом.

При умножении комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ мы умножаем каждый член на каждый, разрешаем переставлять сомножители и заменяем произведение $i \cdot i = i^2$ на вещественное число $–1$:

$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1\cdot a_2 + a_1\cdot b_2i + b_1i\cdot a_2 + b_1i\cdot b_2 i = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 – b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.

Как мы видим, произведение комплексных чисел определяется более сложно, чем сложение – вещественные и мнимые части не выступают изолированно друг от друга, а перемешиваются. Поэтому арифметические законы умножения требуют проверки, которая не сложна, но занимает довольно много места, и мы ее пропускаем.

5) $z_1\cdot z_2 = z_2\cdot z_1$ – коммутативный закон умножения.

6) $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3 = z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ – ассоциативный закон умножения.

7) Число $1 = 1 \cdot 0i$ при умножении на любое комплексное число оставляет это число без изменений:

$1\cdot z = (1 + 0i)\cdot(a + bi) = 1\cdot a – 0\ b + (1 \cdot b + 0\ a)i = a + bi = z$.

8) Для каждого числа $z\ \ 0$ существует обратное число.

Укажем формулу для обратного числа: если z = a + bi 0, то вещественное число a2 + b2 отлично от нуля, и можно рассмотреть число Проверкой убеждаемся, что z z–1 = 1:

Заметим, что если число z – вещественное, т. е. если z = a и a 0, то обратное к z, вычисленное по данному определению, равно, т. е. совпадает с обычным обратным числом, известным для вещественных чисел.

9) К перечисленным выше основным законам арифметических действий добавим дистрибутивный, или распределительный закон:

z1(z2 + z3) = z1z2 + z1z3.

Пример 1. Сложить два комплексных числа $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 4-5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа, нужно сложить их действительные и мнимые части: $z_1 + z_2 = 1+3i+4-5i = 5-2i$

Просто, не правда ли? Действие настолько очевидно, что не нуждается в дополнительных комментариях.

Таким способом можно найти сумму любого количества слагаемых: просуммировать действительные части и просуммировать мнимые части.

Для комплексных чисел справедливо правило первого класса:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – от перестановки слагаемых сумма не меняется.

Пример 2. Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2+i$, $z_2 = \sqrt{3}+5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 - z_2 = -2+i-(\sqrt{3}+5i) = -2+i-\sqrt{3}-5i = -2-\sqrt{3}-4i$$

Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Действительная часть – составная: $-2-\sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2-\sqrt{3})-4i$.

Рассчитаем вторую разность: $z_2 - z_1 = \sqrt{3}+5i-(-2+i) = \sqrt{3}+5i+2-i = 2+\sqrt{3}+4i$

Здесь действительная часть тоже составная: $2+\sqrt{3}$

Пример 3. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1-i$, $z_2 = 3+6i$

Очевидно, что произведение следует записать так: $z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i)$

Нужно раскрыть скобки по правилу умножения многочленов. Все алгебраические действия вам знакомы, главное, помнить, что $i^2 - -1$, и быть внимательным.

Повторим школьное правило умножения многочленов: Чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена:

$$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i) = 1\cdot 3 - i\cdot 3 + 1\cdot 6i - i\cdot 6i = 3-3i+6i+6 = 9+3i$$

$$-i\cdot 6i = -6i^2 = -6\cdot(-1) = +6$$

Как и сумма, ***произведение комплексных чисел перестановочно***, то есть справедливо равенство: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Пример 4. Даны комплексные числа $z_1 = 13+i$, $z_2 = 7-6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$. Составим частное: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{13+i}{7-6i}$

Деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение.

Вспоминаем формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

и смотрим на наш знаменатель: $7-6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7+6i$

Согласно правилу знаменатель нужно умножить на $7+6i$ и, чтобы ничего не изменилось, помножить числитель на то же самое число $7+6i$:
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (помним, что $i^2 = -1$ и не путаемся в знаках):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)} = \frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2} = \frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)} =$$
$$= \frac{85+85i}{49+36} = \frac{85+85i}{85} = 1+i$$

В ряде случаев перед делением дробь целесообразно упростить.

Например, рассмотрим частное чисел: $\frac{-7-12i}{-12+7i}$.

Перед делением избавляемся от лишних минусов: в числителе и в знаменателе выносим минусы за скобки и сокращаем эти минусы:

$$\frac{-7-12i}{-12+7i} = \frac{-(7+12i)}{-(12-7i)} = \frac{7+12i}{12-7i}.$$

Дано комплексное число $z = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$.

Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a+bi$).

Приём тот же – умножаем знаменатель и числитель на сопряженное знаменателю выражение. Снова смотрим на формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. В знаменателе уже есть $(a+b)$, поэтому знаменатель и числитель нужно домножить на сопряженное выражение $(a-b)$, то есть на $\sqrt{3}-i$:

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-(i)^2} = \frac{\sqrt{3}-i}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$$

4 Сопряжённые числа

Мнимая единица i по определению умножения обладает тем свойством, что её квадрат равен –1, т. е. она является квадратным корнем из –1.

Комплексное число –i обладает тем же свойством:

$$(–i)\ 2 = ((–1)\quad i)2 = (–1)2\quad i2 = –1.$$

Можно сказать, что некоторый один квадратный корень из –1 мы обозначим через i, а тогда второй корень запишется как (–i). Замена i на (–i) приводит к понятию комплексного сопряжения.

Комплексно сопряженным с числом z = a + bi называется число a – bi, которое обозначается /z/.

Комплексное сопряжение имеет наглядную геометрическую интерпретацию – точки M(a; b) и соответствующие комплексно сопряженным числам z = a + bi и симметричны друг другу относительно вещественной оси.

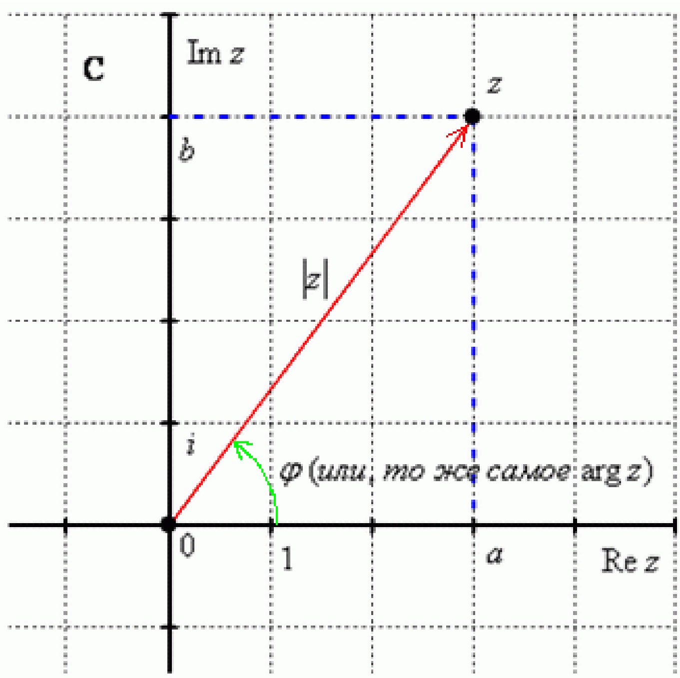
Перечислим свойства этого отображения:

1. если мы два раза выполним комплексное сопряжение, то вернемся к исходному числу;
2. комплексное число равно своему сопряженному в том и только в том случае, когда оно вещественное (его мнимая часть равна нулю);
3. сопряженное к сумме комплексных чисел равно сумме сопряженных;
4. сопряженное к произведению комплексных чисел равно произведению сопряженных;

Полезно заметить, что первые три свойства отражают простые свойства осевой симметрии.

5. Модуль и аргумент комплексного числа

Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в тригонометрической форме: $z = |z|.(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ – это модуль комплексного числа, а φ – аргумент комплексного числа.



Изобразим на комплексной плоскости число $z = a + bi$. Для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти, т.е. считаем, что $a > 0, b > 0$:

Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. То есть ***модуль – это длина*** радиус-вектора, который на чертеже обозначен $|z|$.

Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$ или r

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Данная формула справедлива ***для любых*** значений a и b.

Примечание: *модуль комплексного числа представляет собой обобщение понятия* ***модуля действительного числа****, как расстояния от точки до начала координат.*

Аргументом комплексного числа z называется ***угол*** φ между положительной полуосью действительной оси $\operatorname{Re} z$ и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: $z=0$.

Рассматриваемый принцип фактически схож с ***полярными координатами***, где полярный радиус и полярный угол однозначно определяют точку.

Аргумент комплексного числа z стандартно обозначают: φ или $\arg z$

Из геометрических соображений получается следующая формула для нахождения аргумента: $$\arg z = arctg\frac{b}{a}$$

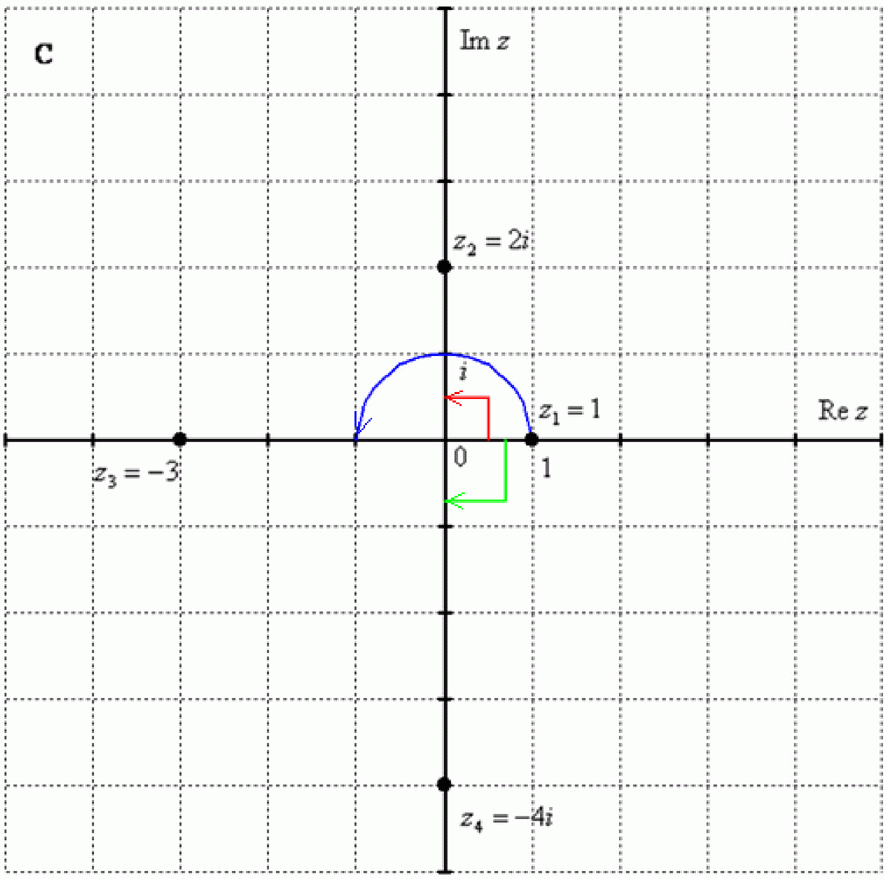
Данная формула справедлива только в правой полуплоскости.

Пример 5. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

$z_1=1$, $z_2=2i$, $z_3=-3$, $z_4=-4i$.

Выполним чертёж. Для наглядности перепишем тригонометрическую форму комплексного числа:

$z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$



Пример 6. Представим в тригонометрической форме число $z_1=1$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_1|=1$. Формальный расчет по формуле:

$|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1$

Очевидно, что $\varphi_1=0$ (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси).

Таким образом, число в тригонометрической форме:

$z_1=\cos 0+i\sin 0$.

Обратное проверочное действие: $z_1=\cos 0+i\sin 0=1+i\cdot 0=1$

Пример 7. Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $z_2 = 2$. Формальный расчет по формуле:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \quad |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Очевидно, что $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ (или 90 º). Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i\cdot 1) = 2i$$

Пример 8. Представим в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найдем его модуль и аргумент.

Очевидно, что $|z_3| = 3$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Очевидно, что $\varphi_3 = \pi$ (или 180º).

Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Проверка: $z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1 + i\cdot 0) = -3$

Пример 9. Представим в тригонометрической форме число $z_4 = -4i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_4| = 4$. Формальный расчет по формуле:

$$|z_4| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Аргумент можно записать двумя способами:

Первый способ: $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ (270º), и, соответственно: $z_4 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

Проверка: $z_4 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 4(0 + i\cdot(-1)) = -4i$

Второй способ: воспользуемся правилом «Если угол больше 180°, то его записывают со знаком минус и противоположной ориентацией»: $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$.

Легко заметить, что $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ – это один и тот же угол.

Таким образом, запись принимает вид: $z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Примечание: Ни в коем случае нельзя использовать четность косинуса, нечетность синуса и проводить дальнейшее «упрощение» записи:

$$z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \neq \cancel{4\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

Контрольные вопросы

1. Что называется комплексным числом?
2. Перечислите свойства комплексных чисел?
3. Как представить комплексное число в геометрической форме?
4. Что называется модулем комплексного числа?

Практическая часть

1. Вычислите:

1) $(3 + 2i) + 3(-1 + 3i)$; 3) $(2 + i)(-1 + 5i)$; 5) i^3; 7) $\frac{3}{i}$;

2) $i - 2 - (6 - 5i)$; 4) $(1 + i)(1 - i)$; 6) $(1 - i)^4$; 8) $\frac{2}{1-i}$.

2. Разложите на линейные множители:

1) $a^2 + 4b^2$; 3) $x^2 + 1$; 5) $x^4 - 4$; 7) $x^6 - 64$;

2) $a^4 - b^4$; 4) $x^2 - 2x + 2$; 6) $x^3 + 8$; 8) $x^4 + 4$.

3. Изобразите на плоскости множество комплексных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|z| = 3$; 3) $|z - 2 + i| \le 3$; 5) $|2z - i| = 4$; 7) $|z - i| = |z - 1|$;

2) $|z + i| = 2$; 4) $|z + 1 + 2i| > 1$; 6) $|iz - 1| \le 1$; 8) $|z - i| + |z + i| = 2$.

4. Вычислите:

1) i^{13}; i^{100}; i^{1993}; 3) $a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Найдите a^4, a^{11}, a^{1992};

2) $(1 + i)^{10}$; 4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1993}$.

5. Верны ли следующие высказывания:

1) число $\sqrt{5}$ является комплексным;
2) число a такое, что $a^2 = -4$ является действительным;
3) число a такое, что $a^4 = 1$ является действительным;
4) многочлен $x^2 + 4$ можно разложить на линейные множители с комплексными коэффициентами;
5) точки плоскости, удовлетворяющие условию $|z - 1| = 2$, лежат на окружности радиуса 1;
6) если комплексное число равно своему сопряженному, то оно является действительным;
7) если $\bar{z} = -z$, то действительная часть числа z равна нулю.

Практическое занятие 3
Определение функций. Преобразования графика функции

Цель занятия: дать определение понятиям *функция, область определения и множество значений;* закрепить умение построения графиков функций.

Теоретическая часть

Переменная y является *функцией* от переменной x, если задана такая зависимость между этими переменными, которая позволяет для *каждого значения* x однозначно определить значение переменной y.

Для того чтобы задать функцию, нужно указать:

1) множество D всех возможных значений переменной x, которое называют *областью определения* функции;

2) *правило*, по которому каждому числу x из области D сопоставляется значение другой переменной – y, определяемое числом x.

Если переменная пробегает все множество D, то полученное при этом множество значений другой переменной y образует *множество значений* функции, которое обычно обозначается буквой E.

Переменную x называют *аргументом*, число y – *значением* функции в точке x.

Функция обычно обозначается одной буквой, например f. Значение функции f в точке x обозначается $f(x)$.

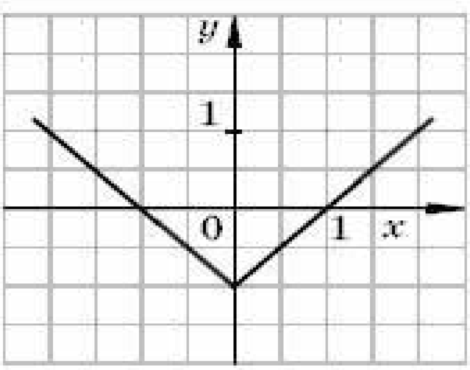
Функция $y = f(x)$ с областью определения D, принимающая числовые значения, задает отображение множества D на множество E.

Отображение можно записывать с помощью стрелки: $y = \sqrt{x + a}$ или $D \xrightarrow{f} E$.

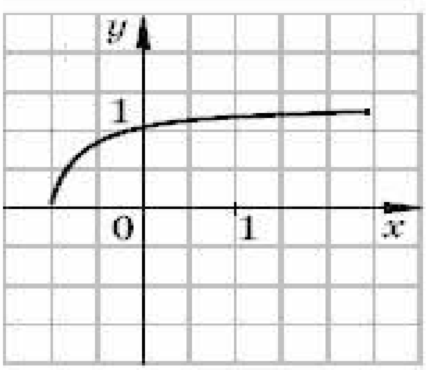
Если на координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых связаны функциональной зависимостью $y = f(x)$, то получим график функции f.

Пример1

Графики функций $y = |x| – 1$, $y = \sqrt{x+1}$



$y = |x| - 1$



$y = \sqrt{x + 1}$

Во многих случаях графики функций могут быть построены путем некоторых преобразований уже известных графиков других функций более простого вида.

График функций вида: $y=Af(x+b)+B$ может быть получен из графика функций $y=f(x)$ при помощи следующих геометрических преобразований:

- осевой симметрии относительно оси $0X$;
- осевой симметрии относительно оси $0Y$;
- центральной симметрии относительно начала координат точки 0;
- параллельного переноса (сдвига) вдоль оси $0X$;
- параллельного переноса (сдвига) вдоль оси $0Y$;
- растяжения (или сжатия) по направлению оси $0X$;
- растяжения (или сжатия) по направлению оси $0Y$;

Отметим, что:

- при осевой симметрии относительно оси $0X$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; -y)$;
- при осевой симметрии относительно оси $0Y$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(-x; y)$;
- при центральной симметрии относительно начала координат $(x; y)$ переходит в точку $(-x; -y)$;
- при параллельном переносе вдоль оси $0X$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(x+a; y)$, где a – некоторое число при этом перенос происходит «вправо», если $a>0$, и «влево», если $a<0$;
- при параллельном переносе вдоль оси $0Y$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; y+b)$, где b – некоторое число при этом перенос происходит «вверх», если $b>0$, и «вниз», если $b<0$;
- при растяжении (сжатии) в p раз $(p>0, p\neq 1)$ вдоль оси $0X$ относительно $0Y$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(px; y)$;
- при растяжении (сжатии) в q раз $(q>0, q\neq 1)$ вдоль оси $0Y$ относительно $0X$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; qy)$;

Применительно к графикам функций эти свойства дают те конкретные геометрические преобразования, использование которых позволяет из известного графика функции $y=f(x)$ строить графики других функций.

Пример 1

График функции $y=4x^2$ получается из графика функции $y= x^2$ растяжением последнего в 4 раза вдоль оси 0Y относительно оси 0X. Переписав $4x^2$ в виде $(2x)^2$, замечаем, что график функции $y= x^2$ можно получить из графика функции $y= x^2$ сжатием последнего в 2 раза вдоль оси 0X относительно оси 0Y .

Пример 2

График функции $y= 2^{x-3}$ получается из графика $y= 2^x$ при помощи параллельного переноса его вдоль оси 0X вправо на отрезок длины 3. Переписав 2^{x-3} в виде$(1/8)*2^x$, замечаем, что график функции $y=(1/8)*2^x$ можно получить из графика функции $y=2^x$ сжатием последнего в 8 раз вдоль оси 0X

Контрольные вопросы

1. Что называют функцией?
2. Дайте определение понятиям: область определения и значения функции?
3. Как осуществить построение графика функции f(x)+b?
1. Что называют графиком функции?
2. Дайте определение понятиям: область определения и значения функции?
3. Как осуществить построение графика функции f(x)+b?

Практическая часть

Постройте графики функций с помощью параллельного переноса и растяжения.

1. y = tg (x+π)
2. y = 2 tg x -3
3. y = tgx
4. y = ctg 3x
5. y= cos ($\frac{3\pi}{2}$ +x)
6. y = -sin (2x+π)
7. y = 4tg (x+ π)+1
8. y = 2 tg 3x-9
9. y = tgx -8
10. y = ctg x – 1
11. y= cos ($\frac{3\pi}{2}$ +5x)
12. y = -sin (10x+ π)

Практическое занятие 4
Показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения и системы

Цель занятия: освоить методы решения рациональных, иррациональных, показательных и тригонометрических уравнений и систем.

Теоретическая часть

Дробно-рациональные уравнения:

В уравнение входят дробные выражения, например:

$$\frac{4}{x-1}; \quad \frac{1+2x}{x} \text{ и т.д.}$$

Схема решения:

- переносим все дроби в одну сторону, приравнивая к нулю;
- находим общий знаменатель дробей;
- выписываем числитель дроби, приравниваем к нулю;
- решаем уравнение;
- если корень образует в нуль общий знаменатель, то этот корень отбрасывается;
- проверка.

Пример 1. Решите уравнение:

$$\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+3}{x-4}=0 \qquad \frac{{}^{x-4}x-2}{x+2}-\frac{{}^{x+2}x+3}{x-4}=0 \qquad \frac{(x-2)(x-4)-(x+3)(x+2)}{(x+2)(x-4)}=0$$

$$\frac{x^2-4x-2x+8-x^2-2x-3x-6}{(x+2)(x-4)}=0$$

$$\underline{x^2}-\underline{\underline{4x}}-\underline{\underline{2x}}+8-\underline{x^2}-\underline{\underline{2x}}-\underline{\underline{3x}}-6=0$$

-11x + 2 = 0

-11x = -2

$x = \frac{2}{11}$

Ответ: $x = \frac{2}{11}$

Проверка

$$\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases}$$

$\frac{2}{11} + 2 = 2\frac{2}{11} \neq 0$

$\frac{2}{11} - 4 = \frac{2}{11} - \frac{4}{1} = \frac{2-44}{11} = -\frac{42}{11} = -3\frac{9}{11} \neq 0$

Иррациональное уравнение - уравнение, в котором под знаком корня содержится переменная.

Схема решения уравнения:

– возведём обе части уравнения в ту степень, в которой находиться корень;
– решим уравнение;
– проверим корни уравнения.

Пример 2.

$\sqrt{x-3}$ = 5-x

$(\sqrt{x-3})^2 = (5-x)^2$

x-3=5^2-2×5x+x^2

x+10x-x^2-25-3=0

-x^2+11x-28=0

x^2-11x+28=0

D=121-112=9

$x_{1,2} = \frac{11 \pm 3}{2}$

x_1=7; x_2=4

Проверка

$\sqrt{x-3}$=5-x

$\sqrt{7-3}$=5-7

$\sqrt{4}$=-2

2≠-2

x=7 не является корнем уравнения

$\sqrt{4-3}$=5-4

1=1

x=4 является корнем уравнения

Ответ: x = 4

Показательные уравнения: Функция вида $y = a^x$, где a – постоянное число, a >0 и $a \neq 1$, называется показательной функцией. Число a называют основанием показательной функции.

Схема решения

a^x=b, b>0 $\qquad$ $a^x = a^m$ $\qquad$ x = m

Пример 3. Решим уравнение $7^{x^2-4x-1} = 49$

Преобразуем $7^{x^2-4x-1} = 7^2$

Функция y= 7^t непрерывная и монотонная, значит:

$x^2 - 4x - 1 = 2$

$x^2 - 4x - 1 - 2 = 0$

$x^2 - 4x - 3 = 0$

D=b^2-4ac

D=$(-4)^2 - 4\times 1\times(-3)$ = 16-12=4

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2\times 1}$; $x_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2\times 1}$ $x_1 = \frac{4+2}{2}$; $x_2 = \frac{4-2}{2}$ $x_1 = 3$; $x_2 = 1$

Ответ: $\{3;1\}$

Свойства показательных функций: D(f)=R – определена на всей числовой оси E(f)=(0;∝)= R + показательная функция принимает значение из множества положительных чисел R+

$a^u \times a^y = a^{u\div y}$

$\frac{a^u}{a^y} = a^{u-y}$

$(ab)^u = a^u \times b^y$

$\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^y}$ 'b □0

$(a^u)^y = a^{uy}$

Используя свойства показательных функций можно упростить уравнение и привести к виду a ^{x} =b

Пример 4. Решите уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^x \times \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

Смотрите свойство 3

$\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{27}{64}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3^x}{4^x}$

Смотрите свойство 4

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

x=3

Ответ: x=3

Тригонометрические уравнения:

$\cos t = a, |a| \le 1, t = \pm\arccos a + 2\pi n, n\in Z$

$\sin t = a, |a| \le 1, t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n\in Z$

$\cos t = -1, t = \pi + 2\pi n, n\in Z$

$\sin t = 1, t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in Z$

$\cos t = 0, t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in Z$

$\sin t = -1, t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\in Z$

$$\sin t = 0, t = \pi n, n\in Z$$

$$tgt = a, t = arctga + \pi n, n\in Z$$

$$ctgt = a, t = arcctga + \pi n, n\in Z$$

Арксинусом числа а называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен *а*.

Пример 5.

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$ Ответ: $\frac{\pi}{3}$

Пример 6.

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$$ Ответ: $-\frac{\pi}{4}$

Арккосинусом числа а называется такое число из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен a.

Пример 7.

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$$ Ответ: $\frac{5\pi}{6}$

Пример 8.

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$ Ответ: $\frac{\pi}{3}$

Арктангенсом числа а называется такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Пример 9.

$$arctg\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$ Ответ: $\frac{\pi}{3}$

Пример 10.

$$arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$$ Ответ: $-\frac{\pi}{3}$

Арккотангенсом числа а называется такое число из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен a.

Пример 11.

$$arcctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3}$$ Ответ: $\frac{\pi}{3}$

Пример 12.

arcctg (-1)= $\frac{3\pi}{4}$ Ответ: $\frac{3\pi}{4}$

sin x = a при $|a|>1$ решений нет, так как $|\sin x|\le 1$.

Пример 13.

sin x = 2

$|2|>1$ Ответ: решений нет.

при $|a|<1$, x = $(-1)^k$ arcsin a+$\pi k, k\in Z$

Пример 14.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in z$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in z$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in z$

Частные случаи

при а=0 , х = π n, n $\in$ Z

Пример 15.

sinx=0

Ответ: х=π n, n $\in$Z

при а=1 , sinx =1 , $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z$

Пример 16.

sin x = 1

Ответ: х = $\frac{\pi}{2}$ +2π n , n $\in$Z

при а = - 1, sin x = - 1, х = - $\frac{\pi}{2}$ + 2π n , n $\in$ Z

Пример 17.

sin x = - 1

Ответ: х = - $\frac{\pi}{2}$ + 2 π n , n $\in$Z

cos x = a

при $|a| > 1$ решений нет

Пример 18.

cosx = 3

$$|3| > 1$$

Ответ: решений нет.

при $|a|$ <1 $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in z$

Пример 19.

cosx= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in z$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in z$

Частные случаи:

при $a = 0, x = \frac{\Pi}{2} + \Pi n, n \in z$

Пример 20.

cos x = 0

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$

при $a = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$

Пример 21.

$\cos x = 1$

Ответ: $x = 2\pi n$, $n \in Z$

при $a = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$

Пример 22.

$\cos x = -1$

Ответ: $x = \pi + 2\pi n$

$tgx=a$, $x=arctga + \pi n$, $n \in Z$

Пример 23.

$tgx=1$

$x=arctg1 + \pi n$, $n \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

$ctgx = a$, $x=arcctga + \pi n$, $n \in Z$

Пример 24.

$ctgx= \sqrt{3}$

$x=arctg\sqrt{3} + \pi n$, $n \in Z$

$x= \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$

Ответ: $x= \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$

Контрольные вопросы

1. Что называется арксинусом числа?
2. Что называется арккосинусом числа?
3. Что называется арктангенсом числа?
4. Что называется арккотангенсом числа?

Практическая часть

Решите уравнения:

1. $2 \sin x - \cos 2x = 0$
2. $7\sin x = 3 \cos 2x$
3. $\cos x + 2\cos 2x = 1$
4. $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$
5. $3(x-2)-5=4-(5x-1)$
6. $\sin 5x\cos x = \sin x\cos 5x$
7. $tg3x - tgx = 0$
8. $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$
9. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$
10. $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 7 \cdot 2^{x+2} = 312$
11. $2^{-x+2,5} = \sqrt{2}$
12. $10^{\frac{21x^2-23}{3}} = \frac{1}{\sqrt{10\sqrt[3]{10}}}$
13. $2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$
14. $\sqrt{x^4 + 19} = 10$
15. $x^3+4 = 0$
16. $7-2(3-x)=4(x-1)+5$

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 5x+4y=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4, \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2^x-2^y=16, \\ x+y=9. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sin x\cos y=0{,}25, \\ \sin y\cos x=075. \end{cases}$

Практическое занятие 5
Преобразование алгебраических выражений

Цель занятия: закрепить навыки преобразования алгебраических выражений

Теоретическая часть

Алгебраическим выражением называется совокупность конечного количества чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками).

Алгебраическое выражение, в котором указаны только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем, называют ***целым рациональным выражением***. Если кроме указанных действий входит действие деления, то выражение называют ***дробно-рациональным***.

Целые рациональные и дробно-рациональные выражения вместе называются рациональными. Если входит еще и действие извлечения корня, то такое выражение называют иррациональным.

Числовым значением алгебраического выражения при заданных числовых значениях букв называют тот результат, который получится после замены букв их числовыми значениями и выполнения указанных в выражении действий.

Областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраического выражения называют множество всех допустимых совокупностей значений букв, входящих в это выражение.

Одночленом называется алгебраическое выражение, в котором числа и буквы связаны только двумя действиями - умножением и возведением в натуральную степень.

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов. Одночлены, из которых состоит многочлен, называются его членами. Одночлен есть частный случай многочлена.

Формулы сокращенного умножения:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2 \text{ квадрат суммы (разности)}$$

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \text{ разность квадратов}$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b\pm b^3 \text{ куб суммы (разности)}$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)\cdot\left(a^2\pm ab+b^2\right) \text{ сумма (разность) кубов}$$

Пример 1. Упростите выражение:

$$\left(7x^3-4y^2\right)\cdot\left(7x^3+4y^2\right)=\left(7x^3\right)^2-\left(4y^2\right)^2=49x^6-16y^4$$

Разложением многочлена на множители называется представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов.

Способы разложения многочлена на множители:

1. Вынесение общего множителя за скобку.

Пример 2. Упростите выражение: $4ab-12bc=4b(a-3c)$

2. Способ группировки.

Пример 3. Упростите выражение:

$a^4-5a^3-2a+10=(a^4-5a^3)-2(a-5)=a^3(a-5)-2(a-5)=(a-5)(a^3-2)$

3. Применение формул сокращенного умножения.

Пример 4. Упростите выражение:

$8x^3-y^6=(2x-y^2)(4x^2+2xy^2+y^4)$

Контрольные вопросы

1. Перечислите способы разложения на множители?
2. Что называется алгебраическим выражением?

Практическая часть

1. Разложите на множители:

а) $a^2+b^2+2a-2b-2ab$; в) a^6-8;

б) $x^3+(y-1)x+y$; г) $x^4-x^2(y^2+1)+y^2$.

2. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$; б) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}$

в) $\dfrac{2a^2-5a+2}{ab-2b-3a+6}$ г) $\dfrac{x^3-27}{x^2y+3xy+9y}$

3. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{3}{2x-y}-\dfrac{2}{2x+y}-\dfrac{1}{2x-5y}\right):\dfrac{4y^2}{4x^2-y^2}$;

б) $\left(\dfrac{3}{a-3}+\dfrac{4}{a^2-5a+6}+\dfrac{2a}{a-2}\right):\left(\dfrac{2a+1}{3}\right)-\dfrac{a-12}{3(3-a)}$;

в) $\left(m+n-\dfrac{4mn}{m+n}\right):\left(\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{n}{n-m}-\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)$;

г) $\left(\dfrac{1}{c^2+3c+2}+\dfrac{2c}{c^2+4c+3}+\dfrac{1}{c^2+5c+6}\right)^2\cdot\dfrac{(c-3)^2+12c}{2}$

Практическое занятие 6

Вычисление и сравнение корней. Выполнение расчетов с радикалами.

Цель: закрепить и проверить теоретические знания в ходе выполнения упражнений, выработать навыки применения теоретических знаний на практике.

Если n – натуральное число, m – целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо равенство $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Определение. *Арифметическим корнем* натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Теоретическая часть

Арифметический корень n-й степени обладает следующими свойствами: если a 0, b 0 и n, m – натуральные числа, причём n 2 , m 2, то

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$. 2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$. 4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Приведём примеры применения свойств степени:

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 7;$

2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$

При любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$. 2. $a^p : a^q = a^{p-q}$.

3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$. 4. $(ab)^p = a^p b^p$.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Задания для самостоятельного выполнения:

1. Упростить выражение $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

$$\blacktriangleright\ \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab. \ \triangleleft$$

2. Вычислить: $1)\ 64^{\frac{1}{2}};\quad 2)\ 27^{\frac{1}{3}};\quad 3)\ 8^{\frac{2}{3}};\quad 4)\ 81^{\frac{3}{4}};$

$1)\ 2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^{\frac{11}{5}};\ \ 2)\ 5^{\frac{2}{7}}\cdot 5^{\frac{5}{7}};\ \ 3)\ 9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}};$

$1)\ \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}};$

$3)\ 8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}};$

3. Выяснить, какое из чисел больше:

$1)\ 3^{\sqrt{71}}$ или $3^{\sqrt{69}}$; $2)\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$;

$3)\ 4^{-\sqrt{3}}$ или $4^{-\sqrt{2}}$; $4)\ 2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$;

4. Упростить выражение:

$1)\ (a^4)^{-\frac{3}{4}}\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6};\quad 2)\ \left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{\frac{1}{12}}.$

5. Сократить дробь:

$1)\ \dfrac{y-16y^{\frac{1}{2}}}{5y^{\frac{1}{4}}+20};\qquad 2)\ \dfrac{a^{\frac{4}{5}}-b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}}}.$

6. Вычислить:

$3)\ (0{,}001)^{-\frac{1}{3}}-2^{-2}\cdot 64^{\frac{2}{3}}-8^{-1\frac{1}{3}};\ \ 4)\ (-0{,}5)^{-4}-625^{0,25}\ \ \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}.$

Контрольные вопросы

1. Дать определение арифметического корня и степени с рациональным показателем.
2. Свойства корней.

Практическое занятие 7
Решение иррациональных уравнений. Нахождение значений степеней с рациональными показателями. Преобразования выражений, содержащих степени.

Цель занятия: закрепить навыки преобразования рациональных, иррациональных степенных, показательных и логарифмических выражений

Теоретическая часть

Корнем n-й степени из числа a называется число b, такое что $b^n = a$

$$x^n = a \quad x = \sqrt[n]{a}$$

	n-четное	n-нечетное
1	$a \square 0$ существует 2 корня	всегда существует один корень $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$
2	$a = 0 \quad x = 0 \quad x = 0$	
3	$a \square 0$ корней нет	

Свойства корня n-й степени:

$$n\sqrt{ab} = \sqrt[n]{a \cdot \sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{n\sqrt{a}}{n\sqrt{b}}, (b \neq 0)$$

$$n\sqrt{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, (k \square 0) \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}\ , \ (k \square 0)$$

$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$, (если $k \leq 0,$ то $a \neq 0$)

Степень с рациональным показателем:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Равенства:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad a^r : a^s = a^{r-s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Логарифмом числа с по основанию а называется такое число b, что

$$a^b = c$$

т.е. показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить c:

$$b = \log_a c$$

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{lof_a b} = b$$

Основные свойства логарифмов:

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^p = p \log_a x$$

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$$

Контрольные вопросы

1. Назовите свойства корня n-й степени?
2. Перечислите основные свойства логарифмов?

Практическая часть

1. Вычислите:

$\log_9 81$	$\lg 100$	$\log_5 25$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$	$\log_{12} 144$
$\log_{\frac{1}{5}} 25$	$\log_{125} 5$	$\log_{64} 4$	$\log_{25} 5$	$\log_{16} 4$

$\log_3 9$	$\log_3 27$	$\log_3 \frac{1}{27}$	$\log_2 8$	$\log_2 \frac{1}{8}$
$\lg 1000$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$	$\log_{144} 12$	$\log_5 125$	$\log_5 625$
$\log_{12} 144$	$\log_{12} 12$	$\log_{12} 1$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$	$\log_3 81$
$\log_2 \frac{1}{32}$	$\log_4 \frac{1}{16}$	$\log_4 16$	$\log_4 \frac{1}{256}$	$\log_{\frac{1}{4}} 256$

2. Вычислите:

$$\frac{1}{2}\log_4 7 + \log_4 32 - \frac{1}{2}\log_4 28 \qquad\qquad \log_3 12 - \frac{1}{2}\log_3 32 + \frac{1}{2}\log_3 6$$

3. Исключите иррациональность в знаменателе:

$$\frac{2}{2-\sqrt{3}} \qquad\qquad \frac{2}{2+\sqrt{3}}$$

4. Упростите выражения:

$$\frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3} \qquad\qquad \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} : (x-y) + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \qquad\qquad \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$$

Практическое занятие 8
Решение прикладных задач
Тема: «Степень числа с рациональным показателем»
Краткие теоретические и учебно-методические материалы

Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = m/n$, m – целое n – натуральное ($n > 1$) называется число вида $\sqrt[n]{a^m}$

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Примеры

1. $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
2. $25^{½} = \sqrt{25} = 5$

Свойства

1. $a^r * a^s = a^{r+s}$
2. $a^r : a^s = a^{r-s}$
3. $(a^r)^s = a^{r*s}$
4. $(a * b)^r = a^r * b^r$
5. $(a/b)^r = a^r / b^r$

6. Пусть r – рациональное число и $0 < a < b$, Тогда:

$$a^r < b^r \text{ при } r > 0$$

$$a^r > b^r \text{ при } r < 0$$

7. Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ сле, что:

$$a^r > a^s \text{ при } a > 1$$

$$a^r < a^s \text{ при } 0 < a < 1$$

Примеры

Сравнить

1. 2^{300} и 3^{200}

$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ и $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

Так как $8 < 9$, по свойству 6 получаем: $2^{300} < 3^{200}$

2. $\sqrt[5]{8}$ и $2^{2/3}$

$\sqrt[5]{8} = 2^{3/5}$ и $2^{2/3}$

По свойству 7 получаем $2^{3/5} < 2^{2/3}$, так как $3/5 < 2/3$

Задание для практического занятия

I вариант

1. Вычислить

а) $25^{1,5}$ б) $8^{-\frac{2}{3}}$

в) $121^{-0,5}$ г) $\left(\frac{49^2}{5^4}\right)^{-\frac{1}{4}}$

д) $\sqrt[3]{6} * (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

2. Разложить на множители.

а) $(bx)^{\frac{1}{7}} + (by)^{\frac{1}{7}}$

б) $c - c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}}$

в) $x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{1}{5}} + 1$

3. Сравнить числа

а) $\sqrt[3]{7^5}$ и $7^{-\frac{3}{5}}$

б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{8}{3}}$ и $\sqrt[8]{\frac{1}{16}}$

в) $3^{-\sqrt{15}}$и$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\sqrt{3}}$

4. Упростить

а) $\frac{b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}}}$

б) $\frac{(a^{\frac{1}{9}}-b^{\frac{1}{9}})(a^{\frac{2}{9}}+a^{\frac{1}{9}}b^{\frac{1}{9}}+b^{\frac{2}{9}})}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$

5. Найти производную

$f(x) = 7x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

II вариант

а) $9^{2,5}$ б) $27^{-\frac{1}{3}}$

в) $32^{-0,2}$ г) $\left(\frac{64^2}{27^6}\right)^{-\frac{1}{6}}$

д) $\sqrt[3]{15} * \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{2}{3}} * \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

а) $(cx)^{\frac{1}{8}} + (cy)^{\frac{1}{8}}$

б) $m - m^{0,5} + m^{0,25}$

в) $x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{6}} - y^{\frac{1}{6}} + 1$

а) $\sqrt[5]{8^6}$ и $8^{-\frac{2}{3}}$

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7}{2}}$ и $\sqrt[7]{\frac{1}{9}}$

в) $2^{-\sqrt{10}}$и$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{5}}$

а) $\frac{m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}$

б) $\frac{(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}})}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$

$f(x) = 6x^4 + 3x^2 + 7x + 5$

Тема: «Показательная функция»

Задание для практического занятия

I вариант

1. Построить график функции

а) $y = 7^x$ б) $y = 0,3^x$ в) $y = 9^{x+1}$

г) $y = 0,8^x - 1$ д) $y = 5^{x-2} + 3$

2. Найти множество значений функции

а) $y = (\frac{1}{6})^x$ б) $y = -4^x$ в) $y = 0,9^x + 1$

г) $y = -2 + (\frac{1}{3})^x$ д) $y = 14^{|x|}$

3. Сравнить числа

а) $\frac{9}{17}^{-\sqrt{3}}$ и 1б) $3^{\sqrt{15}}$ и $(\frac{1}{3})^{-4}$

в) $0,4^{-7}$ и 1 г) $(\frac{1}{6})^{-\frac{14}{3}}$ и $6^{\frac{3}{14}}$

д) $8,3^{\frac{9}{20}}$ и $8,3^{\frac{17}{30}}$

4. Решить графически

а) $8^x = 9 - x$ б) $(\frac{1}{5})^x = x + 1$

в) $\frac{1}{9}^x = x + 10$ г) $2^{x+1} = x + 2$

д) $4^x = \frac{4}{x}$ е) $5^{-x} = -\frac{5}{x}$

ж) $6^x - 3 = x - 2$ з) $7^{x-1} = x$

5. Вычислить

а) $((\sqrt{19})^{\sqrt{4}})^{\sqrt{4}}$ б) $6^{3-\sqrt{2}} * 36^{\frac{5+\sqrt{2}}{2}}$

в) $9^{\sqrt{6}} : 3^{2\sqrt{6}-5}$ г) $(8^{\sqrt[4]{2}})^{\sqrt[4]{8}} : \sqrt[5]{(2^3 * 2^2)^4}$

д) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{7^{14} * 7^6 : 7^5}}$

6. Упростить выражение

$\frac{a+x}{x} + \frac{x}{a-x}$

II вариант

1. а) $y = 9^x$ б) $y = 0,7^x$ в) $y = 7^{x+1}$

г) $y = 0,5^x - 1$ д) $y = 4^{x-3} + 2$

2. а) $y = (\frac{1}{7})^x$ б) $y = -6^x$ в) $y = 0,8^x - 1$

г) $y = -3 + (\frac{1}{2})^x$ д) $y = 15^{|x|}$

3. а) $\left(\frac{17}{9}\right)^{-\sqrt{5}}$ и 1б) $5^{\sqrt{17}}$ и $(\frac{1}{5})^{-7}$

в) $0,3^{-8}$ и 1 г) $(\frac{1}{9})^{-\frac{20}{3}}$ и $9^{\frac{3}{20}}$

д) $9,6^{\frac{3}{19}}$ и $9,6^{\frac{15}{29}}$

4. а) $7^x = 8 - x$ б) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = x + 1$

в) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = x + 9$ г) $3^{x+1} = x + 3$

д) $5^x = \frac{5}{x}$ е) $4^{-x} = -\frac{4}{x}$

ж) $9^x - 5 = x - 4$ з) $2^{x-1} = x$

5. а) $((\sqrt{13})^{\sqrt{8}})^{\sqrt{8}}$ б) $4^{5-\sqrt{3}} * 16^{\frac{5+\sqrt{3}}{2}}$

в) $25^{\sqrt{8}} : 5^{2\sqrt{8}-3}$ г) $(9^{\sqrt[5]{2}})^{\sqrt[5]{16}} : \sqrt[7]{(2^5 * 2^2}$

д) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{7^{20} * 7^2 : 7^4}}$

6. $\frac{2a}{a-1} - \frac{2a}{a+1}$

Тема: «Показательные уравнения»

Краткие теоретические и учебно-методические материалы

Решение: Обозначим $2^x = y$, тогда $4^x = (2^x)^2 = y^2$

$y^2 - 5y + 4 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9$

$x_1 = (-b + D)/2 = (5+3)/2 = 4$

$x_2 = (-b - D)/2 = (5-3)/2 = 1$

Вернемся к обозначению

$2^x = 4 \qquad 2^x = 1$

$2^x = 2^2 \qquad 2^x = 2^0$

$x = 2 \qquad x = 0$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = 0$`

5. Решить уравнение: $100^x - 11*10^x + 10 = 0$

Решение: $10^{2x} - 11*10^x + 10 = 0$

Обозначим $10^x = y$, тогда уравнение примет вид:

$y^2 - 11y + 10 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 121 - 40 = 81$

$Y_1 = (11 + 9)/2 = 10$

$Y_2 = (11 - 9)/2 = 1$

Вернемся к обозначению

$10^x = 1$ $\quad$ $10^x = 10$

$10^x = 100$ $\quad$ $x = 1$

$x=0$

Ответ: $x_1=0$: $x_2=1$

Задание для практического занятия

I вариант

Решить уравнения

1. $5^x = 125$
2. $\sqrt[4]{16^{x-1}} = \sqrt{8^{6x}}$
3. $(\frac{1}{7})^x = 343$
4. $(\frac{1}{5})^{x-3} = \frac{5}{\sqrt{5}}$
5. $4^{x+2} + 4^{x+1} = 1280$
6. $49^x - 50 * 7^x + 49 = 0$
7. $6 * (\frac{1}{2})^{x-2} + (\frac{1}{2})^{x-1} = \frac{26}{32}$
8. $8^{x+1} = 9^{x+1}$
9. $9^{x+1} + 9^{x+2} = 810$
10. $0,25^{x^2-1,5x-0,75} = \sqrt{32}$
11. $3^{4x-1} + 3^{4x+1} - 270 = 0$
12. $3^{5x} - 2 * 3^{5x-1} - 3^{5x-2} = 2$
13. $(0,1)^{8,5+3x-x^2} = 10\sqrt{10}$

Разложить многочлен на множители

14. $2a^2 + 3a - 2ab - 3b$

II вариант

$6^x = 216$

2. $(\frac{1}{9}^x = 729$

3. $\sqrt[6]{64^{x+1}} = \sqrt{4^{8x}}$

4. $(\frac{1}{3})^{x+4} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

5. $8 * 6^{x+3} + 12 * 6^{x+1} = 10800$

6. $4 * 16^x - 17 * 4^x + 4 = 0$

7. $3 * 8^x + 8^{x-2} = 192$

8. $14^{x-1} = 8^{x-1}$

9. $5^{x+2} + 5^{x+3} = \frac{6}{25}$

10.$32^x = 8^{\frac{1}{5}}$

$9^{3x} + 9^{3x+1} - 90 = 0$

12.$3^{x^2-3x-14,5} = \frac{1}{81\sqrt{3}}$

13.$7^{4x-1} + 7^{4x-2} + 7^{4x} = \frac{57}{49}$

14.$2c^2 - 5c + 2cd - 5d$

1) $0{,}5^{7-3x} < 4$

Решение:

$2^{3x-7} < 2^2$

Так как основание $a = 2 > 1$, то функция возрастает, и знак не меняется.

$3x-7 < 2$

$3x < 9$

$x < 3$

Ответ: $x \in (-\infty; 3)$

2) Решить графически:

$3^x \leq 4 - x$

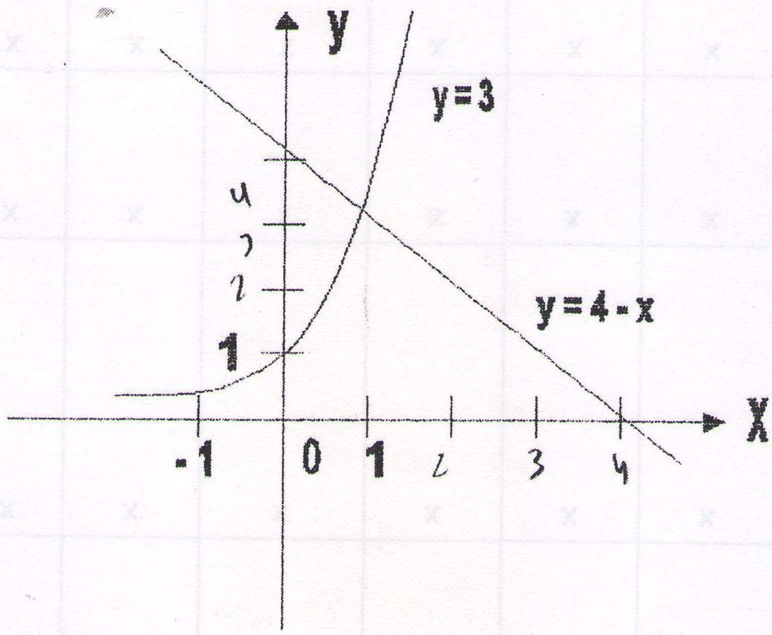
Решение:

$y = 3^x$

x	-1	0	1
y	1/3	1	3

$y = 4 - x$

x	4	0
y	0	4



Ответ: $x \in (-\infty; 1]$

3) $4^x - 10 * 2^x + 16 < 0$

Решение:

$2^{2x} - 10 * 2^x + 16 < 0$

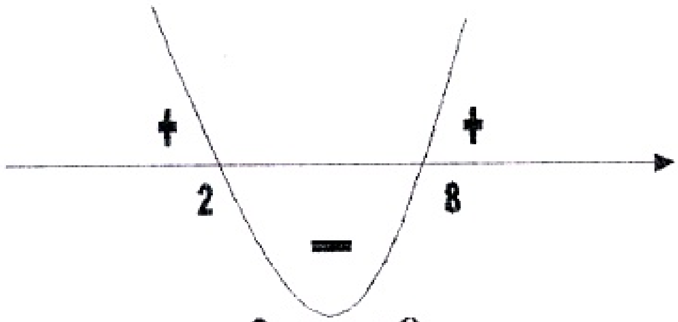
Обозначим $2^x = y$

$y^2 - 10y + 16 < 0$

$y^2 - 10y + 16 = 0$

$D = 100 - 4 * 16 = 100 - 64 = 36$

$y_1 = (10 - 6) / 2 = 2 \quad y_2 = (10 + 6) / 2 = 8$



$2 < y < 8$

$y > 2$ $\qquad$ $y < 8$

Вернемся к обозначению:

$2^x > 2 \qquad 2^x < 8$

$2^x > 2^1 \qquad 2^x < 2^3$

Так как $a = 2 > 1$, то функция возрастает, знак не меняется.

$x > 1 \quad x < 3$

Ответ: $x \in (1; 3)$

Задание для практического занятия

I вариант	II вариант
Решить неравенства	
1. $(\frac{1}{4})^x \geq 64$	1. $(\frac{1}{5})^x \leq 125$
2. $(\sqrt{7})^x < \frac{1}{343}$	2. $(\sqrt{8})^x > 512$
3. $5^{3-2x} \geq \frac{1}{25}$	3. $6^{4-3x} \leq \frac{1}{36}$
4. $0,2^{5+3x} < 0,0016$	4. $0,3^{7+2x} > 0,0081$

5. $6^{x^2+x}\geq(\frac{1}{36})^{-3}$ 5. $5^{x^2-2x}\leq(\frac{1}{25})^{-4}$

6. $(\frac{1}{81})^{\frac{x}{4}}<(\sqrt{3})^{x^2-15}$ 6. $(\frac{1}{625})^{x}>(\sqrt{5})^{2x^2-42}$

7. $(\frac{3}{4})^{x}+(\frac{3}{4})^{x-1}>\frac{21}{16}$ 7. $(\frac{2}{7})^{x}+(\frac{2}{7})^{x-1}<\frac{18}{49}$

8. $5^{2x-1}+5^{2x-2}+5^{2x-3}<155$ 8. $4^{3x-1}+4^{3x-2}+4^{3x-3}>21$

9. $7^x-7^{2x}\geq 0$ 9. $6^x-6^{2x}\leq 0$

10. $2^x-2^{3-x}+2<0$ 10. $9^x+9^{1-x}-10>0$

11. $9^x\leq -x+1$ графически 11. $7^x\leq -x+1$ графически

12. $\frac{8}{\sqrt{128}}>(\sqrt{2})^{x-4}$ 12. $\frac{27}{\sqrt{2187}}<(\sqrt{3})^{2x-6}$

13. $16^x-5*4^x+4\leq 0$ 13. $25^x-6*5^x+5\geq 0$

14. $3^{x+1}>6^{x+1}$ 14. $5^{x+1}<9^{x+1}$

Упростить

15. $\frac{\cos\alpha-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}$ 15. $\frac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}$

Практическое занятие 9
Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому. Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений

1. Определение логарифма

Определение. Логарифмом числа *c* по основанию *a* называется такое число *b*, что $a^b=c$, т. е. показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить число *c*.

Обозначается $b=\log_a c,\ a>0, c>0, a\neq 1$.

Читается «логарифм *c* по основанию *a*». Например:

$$\log_2 16=4, т.к.\ 2^4=16;\ \log_3 27=3, т.к.\ 3^3=27;\ \log_2\frac{1}{4}=-2,$$

$$т.к.\ 2^{-2}=\frac{1}{4};\ \log_5 1=0, т.к.\ 5^0=1.$$

Если основание $a=10$, то такой логарифм числа *c* называется десятичным и обозначается $\lg c$: $\lg c=\log_{10} c$.

Например:

$$\log_{10} 27=\lg 27;\ \lg 10=1;\ \lg 1=0;\ \lg\frac{1}{100}=-2.$$

$\log_3(-27)$ и $\log_6 0$ не имеет смысла, так как уравнения $3^x=-27$ и $6^x=0$ не имеют корней.

2. Свойства логарифмов

$$\log_a(c_1c_2)=\log_a c_1+\log_a c_2$$

$$\log_a\frac{c_1}{c_2}=\log_a c_1 \quad \log_a c_2$$

$$\log_a c^k - k\log_a c$$

$$\log_a\sqrt[n]{c}=\frac{1}{n}\log_a c$$

3. Основное логарифмическое тождество

Равенство $a^b=c$ и $b=\log_a c$ выражают одну и ту же связь между числами *a*, *b, c*. Подставляя в равенство $a^b=c$, представление числа *b* в виде логарифма, получим *основное логарифмическое тождество*:

$$a^{\log_a c}=c$$

Подставляя в равенство $b-\log_a c$ представление *c* в виде степени, получим еще одно тождество:

$$\log_a a^b=b$$

4. Переход к новому снованию

Логарифмы чисел по разным основаниям пропорциональны друг другу:

$$\log_a x=k\log_b x.$$

k - коэффициент пропорциональности: $k=\dfrac{1}{\log_b a}$ или $k=\log_a b$.
k называют ***модулем перехода*** от одного основания логарифма к другому.

В частности, $\log_a x=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{x}$, т.к. $\log_a x=\dfrac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a}=-\log_{\frac{1}{a}} x=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{x}.$

5. Доказательства правил логарифмирования

1) Обозначим $\log_a c_1=b_1, \log_a c_2=b_2$. По основному логарифмическому тождеству имеем $a^{b_1}=c_1, a^{b_2}=c_2$.
Перемножим эти равенства: $a^{b_1}a^{b_2}=a^{b_1+b_2}$, т.е. $c_1c_2=a^{b_1+b_2}$. По определению логарифма $b_1+b_2=\log_a(c_1c_2)$, тогда $\log_a(c_1c_2)=\log_a c_1+\log_a c_2$.

2) Доказательство формулы для модуля перехода. Прологарифмируем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x}=x$ по основанию *b*.

$$\log_a x\cdot\log_b a=\log_b x, \Rightarrow \log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Читают: логарифм числа по новому основанию равен логарифму числа по старому основанию, деленному на логарифм нового основания по старому осно-

ванию. Коэффициент пропорциональности можно записать в виде:
$k = \log_a b$, $т.к.\ \log_a b \cdot \log_b a = 1$ (положите в формуле $x = b$).

6. Рассмотрим примеры

1) $\log_2 256 = \log_2 2^8 = 8;\ \lg 0{,}001 = \lg 10^{-3} = -3;\ \lg \sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}\lg 10 = \frac{1}{3}$.

2) Логарифмирование.

Дано: $A = \left(100a^{\frac{2}{3}}b\right)^3$. Найти: $\lg A$.

Решение: $\lg A = 3\left(\lg 100 + \frac{2}{3}\lg a + \lg b\right) = 6 + 2\lg a + 3\lg b$.

3) Потенцирование (нахождение выражения по его логарифму).

Определение. Действие, обратное логарифмированию, называется *потенцированием.* Оно состоит в отыскании числа по известному значению его логарифма с заданным основанием.

$$\log_2 A = -1 + 2\log_2 a - 3\log_2 b, \Rightarrow \log_2 A = \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 a^2 - \log_2 b^3 = \log_2 \frac{a^2}{2b^3}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{a^2}{2b^3}.$$

4) Переход к одному основанию.

Дано: $A = \log_{\frac{1}{4}} a - \log_{\sqrt{2}} a + 2\log_8 a$

Перейдем к основанию 2.

Решение:

Заметим, что $\log_2 2^k = k$ - это поможет устно находить модуль перехода.

$$A = \frac{\log_2 a}{\log_2 \frac{1}{4}} - \frac{\log_2 a}{\log_2 \sqrt{2}} + 2\frac{\log_2 a}{\log_2 8} = \log_2 a\left(\frac{1}{-2} - 2 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{11}{6}\log_2 a$$

Практическое занятие 10
Приближенные вычисления и решения прикладных задач
Правила логарифмирования

Цель: научить решать задачи с использованием правил логарифмирования.

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач)

2. Контроль усвоения пройденного материала (устный опрос)

1. Сформулируйте определение логарифма.
2. Как называется логарифм по основанию десять?
3. Перечислите свойства логарифмов.
4. Сформулируйте основное логарифмическое тождество.
5. Покажите правило перехода к новому основанию логарифма.
6. Докажите одно из правил логарифмирования.
7. Как называется действие обратное логарифмированию?

3. Примеры решения с помощью правил логарифмирования

1. Прологарифмировать выражение: 1) $x=\frac{ab}{c^3}$.

Решение. $\log x=\log(ab)-\log(c^3)=\log a+\log b-3\log c$.

Здесь и в следующих примерах основания логарифма мы не пишем, т.к. полученное равенство справедливо при любом основании.

2) $x=\sqrt{\frac{3a^2b}{c^5}}$. Решение. $\log x=\frac{1}{2}\log\left(\frac{3a^2b}{c^5}\right)=\frac{1}{2}\left[\log(3a^2b)-\log(c^5)\right]=$

$=\frac{1}{2}\log(\log 3+2\log a+\log b)-\frac{5}{2}\log c=\frac{1}{2}\log 3+\log a+\frac{1}{2}\log b-\frac{5}{2}\log c$.

3) $x=\frac{a^2(a+b)^3}{(a-b)^2c^3}$. Решение. $\log x=\log\left[a^2(a+b)^3\right]-\log\left[(a-b)^2c^3\right]=\log a^2+$

$+\log(a+b)^3-\log(a-b)^2-\log c^3=2\log a+3\log(a+b)-2\log(a-b)-3\log c$.

По данному результату логарифмирования мы можем найти исходное выражение. Это действие называется ***потенцированием***.

2. По известному логарифму числа ***x*** найти это число:

1) $\log x=\log a+\log b-\log c.\ \log x=\log\frac{ab}{c},\Rightarrow x=\frac{ab}{c}$.

2) $\log x=3\log a+2\log(a+b)-\frac{1}{2}\log c=\log a^3+\log(a+b)^2-\log\sqrt{c}==\log\frac{a^3(a+b)^2}{\sqrt{c}}$.

$x=\frac{a^3(a+b)^2}{\sqrt{c}}$.

3) $\log x=\frac{1}{3}(\log a+\log b)-\frac{1}{2}\log(a+c);\ \log x=\frac{1}{3}\log(ab)-\frac{1}{2}\log(a+c)=$

$=\log\sqrt[3]{ab}-\log\sqrt{a+c}=\log\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a+c}}.\ \log x=\log\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a+c}};\ x=\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a+c}}$.

4.Задания для самостоятельного решения

1. Прологарифмировать выражения:

$1)\ x=a^3b^3;\ 2)\ x=\frac{5a^3c^2}{b^4};\ 3)\ x=\frac{2a^3(a+b)}{3b^3};\ 4)\ x=7a^3b^6\sqrt{c};\ 5)\ x=\frac{c^3\sqrt{2b}}{3c^3y^2}$.

2. Потенцировать выражения:

1) $\log x=3\log a-2\log b-\log(a+c)$.

2) $\log x=\frac{\log m+\log n}{5};\ 3)\ \log x=\frac{1}{2}\left[\log a+\frac{1}{3}(\log b-\log(b-c))\right]$.

3. Прологарифмировать по основанию 10 выражение: $1)\ x=500a^3b^4;$

2) $x = 10\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$; 3) $x = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

Решение. 1) $\lg\left(500a^3b^5\right) = \lg 500 + \lg a^3 + \lg b^5 = \lg 100 + \lg 5 + 3\lg a + 5\lg a =$
$= 2 + \lg 5 + 3\lg a + 5\lg b$.

2) $\frac{1}{2}\lg 9 = \lg 9^{\frac{1}{2}} = \lg 3; \lg 3 - \lg 2 = \lg\frac{3}{2}; 100^{\lg\frac{3}{2}} = \left(10^{\lg\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

(Здесь использовали логарифмическое тождество $a^{\log_a x} = x : 10^{\lg x} = x (x > 0) \Rightarrow x = 10\cdot\frac{9}{4} = \frac{45}{2}$).
Решение третьего примера:

$x = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$. $1 - \log_7 2 = \log_7 7 - \log_7 2 = \log_7\frac{7}{2}$;

$49^{\log_7\frac{7}{2}} = \left(7^{\log_7\frac{7}{2}}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}; 5^{-\log_5 4} = \left(5^{\log_5 4}\right)^{-1} = \frac{1}{4}. x = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{2}$

5. Домашняя самостоятельная работа

1. Прологарифмировать выражения: $1)\ x = \sqrt[3]{7a^2b}; 2)\ x = \frac{\sqrt[5]{a^2b}}{(a-b)^3}; 3)\ x = \frac{a^5\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$.

2. Вычислить : $4)\ \log_x 4 = -\frac{1}{2}; 5)\ \log_{16} x = \frac{3}{4}; 6)\ \log_x x = -3$.

Найти $\log_{\frac{1}{6}} 36$. Решение: 1 способ. $\log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{\frac{1}{6}} 6^2 = \log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = -2$.

2 способ. $\left(\log_{\frac{1}{6}} 36 = x\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^x = 36 \Leftrightarrow 6^{-x} = 6^2; x = -2$.

Решить уравнение: $1)\ \log_6 x = -2$. Решение: $\log_6 x = -2 \Leftrightarrow x = 6^{-2}; x = \frac{1}{36}$.
$2)\ \log_x 8 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{-\frac{1}{2}} = 8 \Leftrightarrow (x^{-\frac{1}{2}})^{-2} = 8^{-2}; x = 8^{-2}; x = \frac{1}{64}$.

3. Пропотенцировать выражение: 1) $\log x = 2\log 2 + \log(a+b) + \log(a-b)$;
2) $\log x = \frac{1}{2}\log a + \frac{3}{2}\log(a+b) - \frac{1}{3}\log(a-b) - \frac{5}{3}\log c$.

4. Прологарифмировать по основанию 10: $x = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{3a^5b}}$. $2)\ y = 2a^5b^3c^4$;
$3)\ \sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{ab}}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}}$, если $a > 0, b > 0$.

Практическое занятие 11
Решение логарифмических уравнений

Цель: рассмотреть способы решения логарифмических уравнений; научить обучающихся алгоритму решения логарифмических уравнений.

6. Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x = b$. Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке $(0; \infty)$ и принимает на этом промежутке все действительные значения. По теореме о корне следует, что для любого b данное уравнение имеет, и притом только одно, решение. Из определения логарифма числа сразу следует, что a^b является таким решением.

Пример 1. $\log_2(x^2+4x+3)=3, \Rightarrow x^2-4x+3=2^3, \Rightarrow x^2+4x-5=0,\ x_1=1,\ x_2=-5.$

2. $\log(2x+3)=\log(x+1).$ Это уравнение определено для тех значений x, при которых выполнены неравенства: $2x+3>0$ и $x+1>0.$ Это уравнение равносильно уравнению $2x+3=x+1,\ x=-2.\ x=-2$ - не удовлетворяет неравенству $x+1>0, \Rightarrow$, данное уравнение корней не имеет.

3. $\log_x(x^2-2x+2)=1, (x>0, x\neq 1);\ x^2-2x+2=x^1, \Rightarrow x^2-3x+2=0,$

$x_1=1,\ x_2=2.\ x=1-$ не является решением Ответ: 2.

4. $\lg(x^2-17)=\lg(x=3), \Rightarrow x^2-17=x+3,$ если $x^2-17>0$ и $x+3>0.$

$x^2-x-20=0,\ x_1=5;\ x_2=-4.\ x=-4-$ не является корнем уравнения. Ответ: 5.

Определение. Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком логарифма.

Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то равны и их логарифмы при данном основании и, обратно, если равны логарифмы чисел при данном основании, то равны и соответствующие им числа.

Необходимо учитывать, что для любого $a\ (a>0, a\neq 1)$ логарифмы отрицательных чисел и нуля не существуют.

5. $\log_3(12x+4)-\log_3(x-7)=\log_3 9;\ \log_3\dfrac{12x-4}{x-7}=\log_3 9, \Rightarrow \dfrac{12x-4}{x-7}=9$

$(x-7\neq 0).12x+4=9x-63,\ 3x=-67,\ x=22\frac{1}{3}.$ Подставим $x=-22\frac{1}{3}$.

Уравнения: $12x+4$ и $x-7$ - отрицательны, следовательно $x=-22\frac{1}{3}$ - посторонний корень, а уравнение не имеет решений.

6. $\lg(x-1)+\lg(x+1)=\lg 2:\ \lg(x-1)(x+1)=\lg 2, \Rightarrow (x-1)(x+1)=2,$

$x^2-1=2,\ x^2=3,\ x_1=-\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{3}-$ посторонний корень, так как при $x_1=-\sqrt{3}$:

$-\sqrt{3}\ \ 1<0$ и $\sqrt{3}\ \ 1<0, \Rightarrow$, логарифмы этих выражений не существуют.

Ответ: $x = \sqrt{3}$.

7. $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - 3\log_4 2;\ 2 = \log_4 16, \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_4(x+3) - \log_4(x-1) = \log_4 16 - 3\log_4 2, \Rightarrow \log_4 \dfrac{x+3}{x-1} = \log_4 \dfrac{16}{8}, \Rightarrow \dfrac{x+3}{x-1} = 2;$

$x+3 = 2x-1,\ x = 5.$

Проверка: $\log_4(5+3) - \log_4(5-1) = 2 - 3\log_4 2, \log_4 8 - \log_4 4 = \log_4 16 - \log_4 8,$

$\log_4 \dfrac{8}{4} = \log_4 \dfrac{16}{8},\ \log_4 2 = \log_4 2.$

Ответ: 5.

8. $\dfrac{1}{12}\lg^2 x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\lg x.$ Обозначим $\lg x = z,$ тогда $\dfrac{1}{12}z^2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}z,$ или

$z^2 + 3z - 4 = 0,\ z_1 = -4,\ z_2 = 1.\ \ \lg x = -4, \Rightarrow x_1 = 10^{-4} = 0{,}0001,\ x_2 = 10.$

Логарифмическое уравнение можно решать одновременно с нахождением области определения соответствующего логарифма.

9. $\log_3(x-12) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-12 = 3^2 \\ x-12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ x > 12 \end{cases} \Leftrightarrow x = 21.$

10. $\log_x 16 - \log_x 2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x \dfrac{16}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = 8 \Leftrightarrow x = 64. \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases}$

11. $\lg(x-3) + \lg(x-2) = 1 - \lg 5.\ \ 1 = \lg 10.$

Потенцируем: $\begin{cases} \lg(x-3) + \lg(x-2) = \lg 10 - \lg 5 \\ x-3 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg[(x-3)(x-2)] = \lg\dfrac{10}{5} \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-2) = 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

$\lg^2 x + \lg x^2 = \lg^2 2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 + 2\lg x - \lg^2 2 + 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x = -1 - \lg 2 \\ \lg x = -1 + \lg 2 \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg x + \lg 2 = -1 \\ \lg x - \lg 2 = -1 \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(2x) = -1 \\ \lg\left(\dfrac{x}{2}\right) = -1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 10^{-1} \\ \dfrac{x}{2} = 10^{-1} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}05 \\ x = 0{,}2 \end{cases}.$

Ответ: 0,05; 0,2.

13. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6. \quad x > 0.$

Используем формулу: $\log_{a^m} M = \frac{1}{m}\log_a M.$ Приведем левую часть к основанию 3:

$$\log_{\sqrt{3}} x = \log_{3^{\frac{1}{2}}} x = 2\log_3 x, \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{3^{-1}} x = -\log_3 x.$$

Таким образом

$$\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x = 6, \Leftrightarrow 2\log_3 x = 6, \Leftrightarrow x = 3^3, \Rightarrow x = 27.$$

14. $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3, \ x > 0.$ По формуле $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$ преобразуем левую часть уравнения к основанию 2: $\log_{x^2} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} = \frac{4}{2\log_2 x}.$

$$\log_{2x} 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = \frac{6}{1+\log_2 x}.$$

Тогда

$$\frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{1+\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\log_2^2 x - 5\log_2 x = 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -\frac{1}{3} \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{-\frac{1}{3}} \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ответ: $2^{-\frac{1}{3}}; 4.$

Задания. Решите логарифмические уравнения:

1) $\log_5 x = 2$; 2) $\log_{0,4} x = -1$; 3) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$; 4) $\lg x = 2$; 5) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4) = -2$;

6) $\log_\pi (x^2 + 2x + 3) = \log_\pi 6$; 7) $\log_{0,3}(5+2x) = 1$; 8) $\log_2(3-x) = 0$;

9) $\lg x = 3 - \lg(2x+10)$; 10) $\lg(x-\sqrt{3}) + \lg(x+\sqrt{3}) = 0$;

11) $\lg(127 + x^3) - 3\lg(x+1) = 0$; 12) $\frac{1}{2}\lg(x-3) + \lg\sqrt{2x+2} = \lg(x+1)$;

13) $\log_3(2^x+3) + \log_3(2^x-3) = \log_3 7$; 14) $\log_5(x+10) = 2$; 15) $\log_x 2 + \log_x 3 = \frac{1}{3}$.

Практическое занятие 12 История тригонометрии

Цель: познакомиться с историей тригонометрии.

Теоретическая часть

Древнегреческие математики в своих построениях, связанных с измерением дуг круга, использовали технику хорд. Перпендикуляр к хорде, опущенный из центра окружности, делит пополам дугу и опирающуюся на неё хорду. Половина поделенной пополам хорды — это синус половинного угла, и поэтому функция синус известна также как «половина хорды». Благодаря этой зависимости, значительное число тригонометрических тождеств и теорем, известных сегодня, были также известны древнегреческим математикам, но в эквивалентной хордовой форме.

Хотя в работах Евклида и Архимеда нет тригонометрии в строгом смысле этого слова, их теоремы представлены в геометрическом виде, эквивалентном специфическим тригонометрическим формулам. Теорема Архимеда для деления хорд эквивалентна формулам для синусов суммы и разности углов. Для компенсации отсутствия таблицы хорд математики времен Аристарха иногда использовали хорошо известную теорему, в современной записи — $\sin \alpha / \sin \beta < \alpha/\beta < \tan \alpha / \tan \beta$, где $0° < \beta < \alpha < 90°$, совместно с другими теоремами.

Первые тригонометрические таблицы были, вероятно, составлены Гиппархом Никейским (180—125 лет до н. э.). Гиппарх был первым, кто свёл в таблицы соответствующие величины дуг и хорд для серии углов. Систематическое использование полной окружности в 360° установилось в основном благодаря Гиппарху и его таблице хорд. Возможно Гиппарх взял идею такого деления у Гипсикла, который ранее разделил день на 360 частей, хотя такое деление дня могли предложить и вавилонские астрономы.

Менелай Александрийский (100 н. э.) написал «Сферику» в трёх книгах. В первой книге он представил основы для сферических треугольников, аналогично I книге «Начал» Евклида о плоских треугольниках. Он представил теорему, для которой нет аналога у Евклида, о том, что два сферических треугольника конгруэнтны («соразмерный», «соответствующий»), если соответствующие углы равны, но он не делал различия между конгруэнтными и симметричными сферическими треугольниками. Другая его теорема гласит о том, что сумма углов сферического треугольника всегда больше 180°. Вторая книга «Сферики» применяет сферическую геометрию к астрономии. Третья книга содержит «теорему Менелая»», известную также как «правило шести величин».

Позднее Клавдий Птолемей (90 — 168 г. н. э.) в «Альмагесте» расширил Гиппарховы «Хорды в окружности». Его XIII книга — самая значимая тригонометрическая работа всей античности. Теорема, которая была центральной в вычислении хорд Птолемея, также известна сегодня как теорема Птолемея, которая говорит о том, что сумма произведений противоположных сторон выпуклого вписанного четырёхугольника равна произведению диагоналей. Отдельный случай теоремы Птолемея появился как 93 предложение «Данных» Евклида.

Теорема Птолемея влечёт за собой эквивалентность четырёх формул суммы и разности для синуса и косинуса. Позднее Птолемей вывел формулу половинного угла. Птолемей использовал эти результаты для создания своих тригонометрических таблиц, хотя, возможно, эти таблицы были выведены из работ Гиппарха. Ни таблицы Гиппарха, ни Птолемея не сохранились до настоящего дня, хотя свидетельства других древних авторов снимают сомнения об их существовании.

Другие источники сообщают, что именно замена хорд синусами стала главным достижением Средневековой Индии. Такая замена позволила вводить различные функции, связанные со сторонами и углами прямоугольного треугольника. Таким образом, в Индии было положено начало тригонометрии как учению о тригонометрических величинах.

Индийские учёные пользовались различными тригонометрическими соотношениями, в том числе и теми, которые в современной форме выражаются как

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \; \sin\alpha = \cos(90 - \alpha)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Индийцы также знали формулы для кратных углов $\sin n$, $\cos n$, где n = 2,3,4,5.

Тригонометрия необходима для астрономических расчётов, которые оформляются в виде таблиц. Первая таблица синусов имеется в «Сурья-сиддханте» и у Ариабхаты. Позднее учёные составили более подробные таблицы: например, Бхаскара приводит таблицу синусов через 1°.

Южноиндийские математики в 16 веке добивались больших успехов в области суммирования бесконечных числовых рядов. По-видимому, они занимались этими исследованиями, когда искали способы вычисления более точных значений числа π. Никаланта словесно приводит правила разложения арктангенса в бесконечный степенной ряд. А в анонимном трактате «Каранападдхати» («Техника вычислений») даны правила разложения синуса и косинуса в бесконечные степенные ряды. Нужно сказать, что в Европе к подобным результатам подошли лишь в 17-18 вв. Так, ряды для синуса и косинуса вывел Исаак Ньютон около 1666 г., а ряд арктангенса был найден Дж. Грегори в 1671 г. и Г. В. Лейбницем в 1673 г.

В 8 в. Учёные стран Ближнего и Среднего Востока познакомились с трудами индийских математиков и астрономов и перевели их на арабский язык. В середине 9 века среднеазиатский учёный аль-Хорезми написал сочинение «Об индийском счёте». После того как арабские трактаты были переведены на латынь, многие идеи индийских математиков стали достоянием европейской, а затем и мировой науки.

Практическая часть

Составьте сообщение об истории тригонометрии, основываясь на информации, данной в теоретической части.

Практическое занятие 13
Построение графиков функций, заданных различными способами

Цель: освоить построение графиков функций, заданных различными способами

Теоретическая часть

Во многих случаях графики функций могут быть построены путем некоторых преобразований уже известных графиков других функций более простого вида.

График функций вида: $y=A\,f(x+b)+B$

может быть получен из графика функций $y=f(x)$ при помощи следующих геометрических преобразований:

– осевой симметрии относительно оси $0X$;
– осевой симметрии относительно оси $0Y$;
– центральной симметрии относительно начала координат точки 0;
– параллельного переноса (сдвига) вдоль оси $0X$;
– параллельного переноса (сдвига) вдоль оси $0Y$;
– растяжения (или сжатия) по направлению оси $0X$;
– растяжения (или сжатия) по направлению оси $0Y$;

Отметим, что:

– при осевой симметрии относительно оси $0X$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; -y)$;
– при осевой симметрии относительно оси $0Y$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(-x; y)$;
– при центральной симметрии относительно начала координат $(x; y)$ переходит в точку $(-x; -y)$;
– при параллельном переносе вдоль оси $0X$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(x+a; y)$, где a – некоторое число при этом перенос происходит «вправо», если $a>0$, и «влево», если $a<0$;
– при параллельном переносе вдоль оси $0Y$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; y+b)$, где b – некоторое число при этом перенос происходит «вверх», если $b>0$, и «вниз», если $b<0$;
– при растяжении (сжатии) в p раз $(p>0, p\neq1)$ вдоль оси $0X$ относительно $0Y$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(px; y)$;
– при растяжении (сжатии) в q раз $(q>0, q\neq1)$ вдоль оси $0Y$ относительно $0X$ точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; qy)$;

Применительно к графикам функций эти свойства дают те конкретные геометрические преобразования, использование которых позволяет из известного графика функции $y=f(x)$ строить графики других функций.

Пример 1. График функции $y=4x^2$ получается из графика функции $y= x^2$ растяжением последнего в 4 раза вдоль оси 0Y относительно оси 0X. Переписав $4x^2$ в виде $(2x)^2$, замечаем, что график функции $y= x^2$ можно получить из графика функции $y= x^2$ сжатием последнего в 2 раза вдоль оси 0X относительно оси 0Y .

Пример 2. График функции $y= 2^{x-3}$ получается из графика $y= 2^x$ при помощи параллельного переноса его вдоль оси 0X вправо на отрезок длины 3. Переписав 2^{x-3} в виде$(1/8)*2^x$, замечаем, что график функции $y=(1/8)*2^x$ можно получить из графика функции $y=2^x$ сжатием последнего в 8 раз вдоль оси 0X

Контрольные вопросы

1. Что называют графиком функции?
2. Дайте определение понятиям: область определения и значения функции?
3. Как осуществить построение графика функции f(x)+b?

Практическая часть

Постройте графики функций с помощью параллельного переноса и растяжения.

1. $y = tg\,(2x+\pi)$
2. $y = 2\,tg\,x-1$
3. $y = tgx$
4. $y = ctg\,3x - 1$
5. $y= \cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)$
6. $y = -\sin\,(4x+\pi)$
7. $y = tg\,(x+\pi)$
8. $y = 2\,tg\,x -3$
9. $y = tgx$
10. $y = ctg\,3x$

Практическое занятие 13 (продолжение)

Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

Цель: закрепить навыки решения тригонометрических уравнений.

Теоретическая часть

Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса произвольного угла

α радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\,\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

α радианы	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\,\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos\alpha = 1 \qquad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Формулы сложения:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Формулы суммы и разности синусов (косинусов):

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Формулы половинного аргумента:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Формулы приведения:

Аргумент	Функция			
	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	- sin α	cos α	- tg α	- ctg α
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	cos α	- sin α	- ctg α	- tg α
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	cos α	sin α	ctg α	tg α
$\pi+\alpha$	- sin α	- cos α	tg α	ctg α
$\pi-\alpha$	sin α	- cos α	- tg α	- ctg α
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	- cos α	sin α	- ctg α	- tg α
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	- cos α	- sin α	ctg α	tg α
$2\pi+\alpha$	sin α	cos α	tg α	ctg α
$2\pi-\alpha$	- sin α	cos α	- tg α	- ctg α

Тригонометрические уравнения:

$\cos t = a, |a| \le 1, t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

$\sin t = 1, t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos t = 1, t = 2\pi n, n \in Z$

$\sin t = -1, t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos t = -1, t = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\sin t = 0, t = \pi n, n \in Z$

$tgt = a, t = arctga + \pi n, n \in Z$

$\cos t = 0, t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\sin t = a, |a| \le 1, t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$

$ctgt = a, t = arcctga + \pi n, n \in Z$

Арксинусом числа а называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Пример 1. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$

Пример 2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ Ответ: $-\frac{\pi}{4}$

Арккосинусом числа а называется такое число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Пример 3. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ Ответ: $\frac{5\pi}{6}$

Пример 4. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ Ответ: $\frac{\pi}{3}$

Арктангенсом числа а называется такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Пример 5. $arctg\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ Ответ: $\frac{\pi}{3}$

Пример 6. $arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ Ответ: $-\frac{\pi}{3}$

Арккотангенсом числа а называется такое число из интервала $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

Пример 7. $arcctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$ Ответ: $\frac{\pi}{3}$

Пример 8. $Arcctg(-1) = \frac{3\pi}{4}$ Ответ: $\frac{3\pi}{4}$

sin x = a

при $|a|$ □1решений нет, так как $|\sin\chi| \le 1$

Пример 9. $\sin\chi = 2$ $\quad |2|$ □1 $\quad$ Ответ: решений нет.

при $|a|$ □1, $x = (-1)^{k} \arcsin a + \pi\kappa, \kappa \in Z$

Пример 10. $\sin x = \frac{1}{2}$ $\quad x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in z$ $\quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in z$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in z$

Частные случаи:

при a=0 , $x = \pi n, n \in Z$

Пример 11. $\sin x=0$ $\quad$ Ответ $x=\pi n, n \in Z$

при a=1 , sinx =1 , $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in z$

Пример 12. $\sin x = 1$ $\quad$ Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

при a = - 1 , sin x = - 1 , $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Пример 13. $\sin x = -1$ $\quad$ Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = a$

при $|a| > 1$ решений нет

Пример 14. $\cos x = 3$ $\quad |3| > 1$ $\quad$ Ответ: решений нет.

при $|a| < 1$ $\quad x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in z$

Пример 15. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in z$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in z$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in z$

Частные случаи:

при $a = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$

Пример 16 . $\cos x = 0$ $\quad$ Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z$

при $a = 1$, $x = 2\pi n, n \in Z$

Пример 17. $\cos x = 1$ $\quad$ Ответ: $x = 2\pi n, n \in Z$

при a = - 1 , $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

Пример 18. $\cos x = -1$ $\quad$ Ответ : $x = \pi + 2\pi n$

$$tgx=a,\ x=arctga+\pi n,\ n\in Z$$

Пример 19. tgx=1

$$x=arctg1+\pi n,\ n\in Z \qquad x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

$$ctgx=a,\ x=arcctga+\pi n,\ n\in Z$$

Пример 20. ctgx= $\sqrt{3}$

$$x=arctg\sqrt{3}+\pi n,\ n\in Z \qquad x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

Практическая часть

1. Решите уравнение: 2 sin x – cos 2x = 0
2. Решите уравнение: sin $(\pi-x)$ - cos $(\frac{\pi}{2}+x)$ $=2\sqrt{2}$
3. $\cos x+2\cos 2x=1$
4. $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$
5. $4\sin 2x-3\sin(2x-\frac{\pi}{2})=5$
6. $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x$
7. $tg3x-tgx=0$

Контрольные вопросы

1. Что называется арксинусом числа?
2. Что называется арккосинусом числа?
3. Что называется арктангенсом числа?
4. Что называется арккотангенсом числа?

Практическое занятие 14
Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс

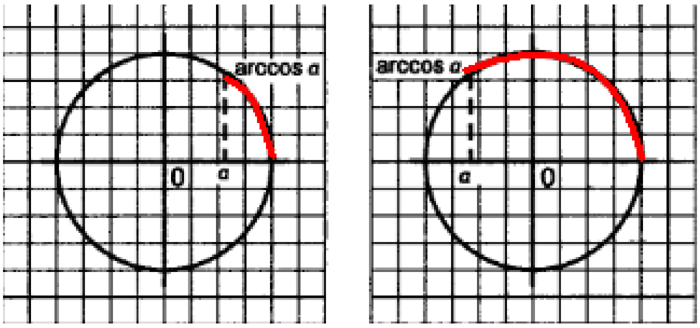
Цель: познакомиться с понятиями обратных тригонометрических функций.

Теоретическая часть

Определение. Пусть | a | $\le$ 1. Арккосинусом *a* называется такое число из отрезка [0 ;π], косинус которого равен *a* (рис.1).

Следовательно, решение уравнения cos t = *a*, где (| a | $\le$ 1) запишем в общем виде:

$$t=\pm\arccos a+2\pi k.$$



если $|a| \leq 1$, то

$$\arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = a; \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

рис.1

Особая форма записи решений уравнения cos t = а принята для а=0, а= 1 и а = -1:

если cos t = 1,	то	t = 2πk
если cos t = - 1,	то	t = π + 2πk
если cos t = 0 ,	то	t =+ πk.

Докажем ***теорему***. Для любого $a \in [-1;\ 1]$(*a* из отрезка от минус единицы до единицы) выполняется равенство arccos a + arccos (–a) = π.

Доказательство. Для определенности будем считать, что а > 0, тогда – а < 0. На числовой окружности отметим arcos *a* (это длина дуги AK) и arccos (–a) (это длина дуги AT) (см. рис. 2)

Длины дуг AK и TC равны, так как дуги AK и TC симметричны относительно вертикального диаметра окружности.

Отсюда следует, что arcos a + arcos (–a) = AK + AT= TC + AT = π.

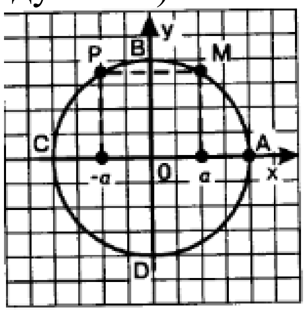


рис. 2

Из доказанной теоремы следует: arcos (–a) = π – arcos a, где 0 ≤ a ≤ 1.

Когда a > 0, считают, что arcos *a* принадлежит первой четверти числовой окружности.

Когда a < 0 считают, что arcos *a* принадлежит второй четверти числовой окружности. Решим уравнения sin t = 0,2 и sin t = - 0,2.

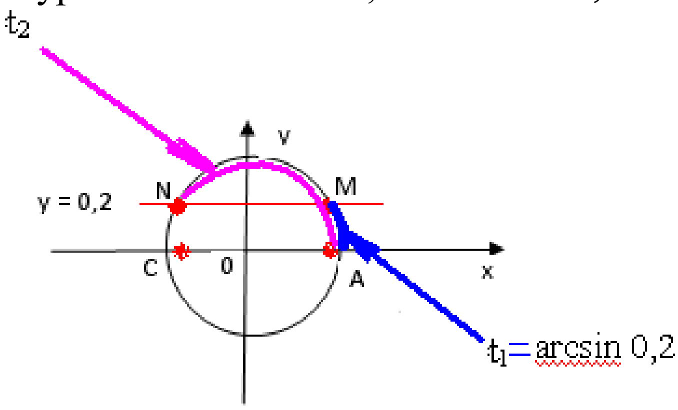


рис.3

Решение первого уравнения будет $t = t_1 + 2\pi k$; $t = t_2 + 2\pi k$, где t_1 – это длина дуги AM, а t_2 – это длина дуги AN.

Так как NC = AM и AN=AC –NC, AC =π, то $t_2 = \pi - t_1$.

По аналогии с арккосинусом математики ввели для числа t_1 новый символ: arcsin 0,2. Мы будем понимать arcsin 0,2 как число (длина дуги AM), синус которого равен 0,2 и которое принадлежит первой четверти числовой окружности (т.е. отрезку [0; $\frac{\pi}{2}$]). Тогда корни уравнения sin t = 0,2 можно записать в виде:

$t = \arcsin 0{,}2 + 2\pi k$; $t = \pi - \arcsin 0{,}2 + 2\pi k$.

Определение. Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка А – правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку окружности по следующему правилу:

1) Если t>0, то, двигаясь из точки А в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь АМ длины t. Точка М и будет искомой точкой М (t).

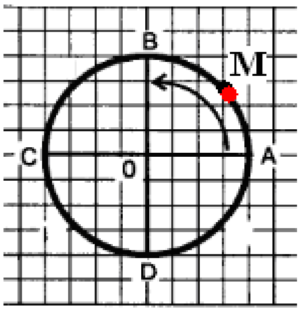


Рис. 1

рис.4

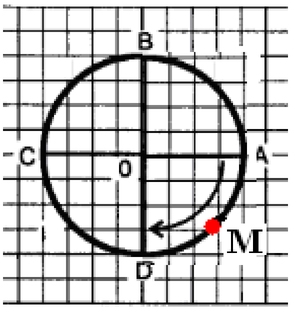


рис.5 Рис. 2

2) Если t<0, то, двигаясь из точки А в направлении по часовой стрелке (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь АМ длины |t|. Точка М и будет искомой точкой М (t).

3) Числу t = 0 поставим в соответствие точку А. Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть числовой окружностью.

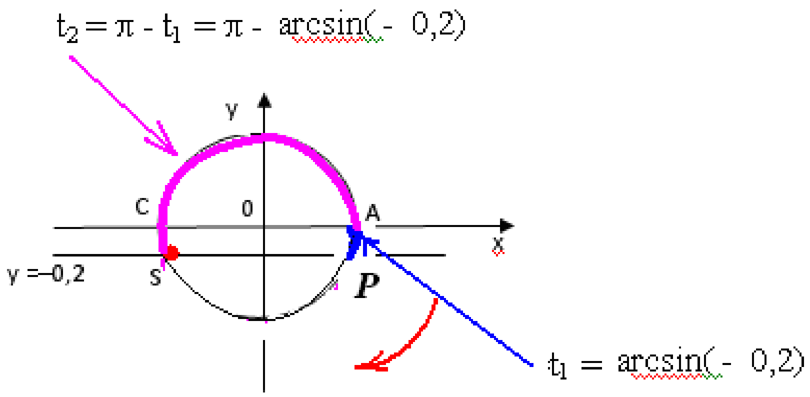


рис.6

Решим уравнение sin t = - 0,2.

ВСПОМНИМ. По определению, так как синус отрицательный то точка движется по единичной окружности по ходу часовой стрелки (смотри определение рис. 6), и мы условились полученные углы брать со знаком минус, тогда получим:

С помощью числовой окружности: $t = t_1 + 2\pi k$;

$t = t_2 + 2\pi k$, где t_1 – это длина дуги PA, взятая со знаком минус,

а t_2 – это длина дуги SA, взятая тоже со знаком минус.

Число t_1 обозначили символом arcsin (- 0,2) и заметили, что

$$\arcsin(-0{,}2) = -\arcsin 0{,}2$$

так как дуги PA и AM (см рис. 4 и 5) равны по длине и противоположны по направлению).

Математики также обратили внимание, что дугу AS, по аналогии с первым примером, можно получить как половину окружности минус арксинус числа минус а, покажем, как это получить

$$AS = AC + CS = AC + PA = AC - AP$$

тогда ответ уравнения sin t = - 0,2, можно записать аналогично с уравнением sin t = 0,2. Посмотрим, как это выглядит: $t_2 = \pi - t_1$.

arcsin (- 0,2) мы будем понимать как число (длина дуги AM), синус которого равен – 0,2, и которое принадлежит четвертой четверти числовой окружности (т.е. отрезку $[-\frac{\pi}{2};0]$).

Тогда корни уравнения sin t = - 0,2 можно записать в виде:

$t = \arcsin(-0,2) + 2\pi k$;

$t = \pi - \arcsin(-0,2) + 2\pi k$.

Сформулируем определение ***арксинуса.*** Пусть $|a| \leq 1$. ***Арксинусом*** *а* называется такое число из отрезка $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, синус которого равен *а*. Зная это определение, можно сделать общий вывод о решении уравнения: sin t = a.

Если $|a| \leq 1$, то уравнение sin t = a имеет две серии решений:

$t = \arcsin a + 2\pi k$; $\qquad t = \pi - \arcsin a + 2\pi k$.

Особая форма записи решений уравнения sin t=a принята для a =0, a=1 и a = -1:

sin t = 0 при $t = \pi k$,

sin t = 1 при $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\qquad$ sin t = - 1 при $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Для любого $a \in [-1; 1]$ (а из отрезка от минус единицы до единицы) справедливо равенство arcsin (- a) = –arcsin a. (рис.)

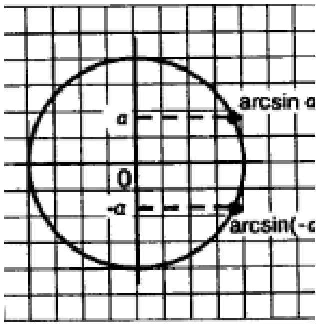


рис.7

Арктангенсом а называется такое число из промежутка $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен а.

Часто используют равенство: arctg(-a) = - arctg a, которое справедливо для любого а.

Зная определение арктангенса, сделаем общий вывод о решении уравнения tg x= a: уравнение tg x = a имеет решение $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k$.

Арккотангенсом а называется такое число из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен а

Решение уравнения ctg x = a записываются в виде: $x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi k$.

Обратим внимание, что уравнение ctg x = a можно преобразовать к виду $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{a}$, за исключением случая, когда a = 0.

Практическая часть

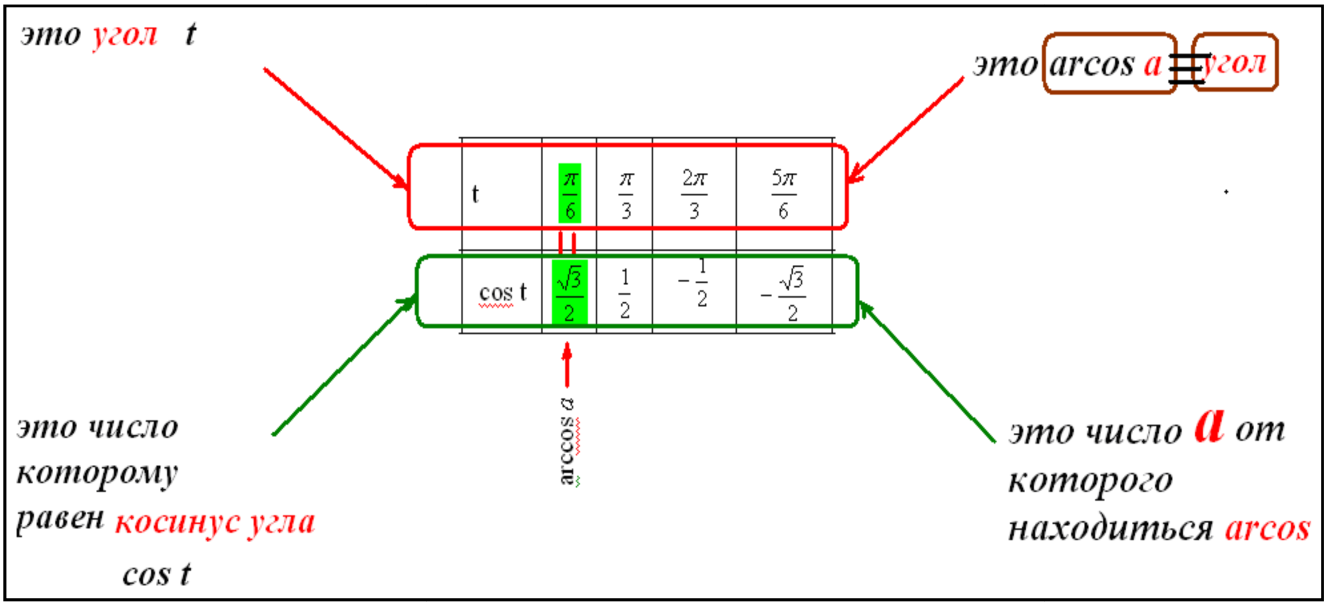
Пример 1. Вычислить $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = t. Тогда cos t = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и t $\in$ [0; π]. Вспомним, что значению cos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ соответствует $\frac{\pi}{6}$. Значит, t = $\frac{\pi}{6}$, так как cos $\frac{\pi}{6}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6}$ $\in$ [0;π]. Значит, arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{\pi}{6}$.

arccos *a*	t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
a	cos t	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

arccos – это длина дуги, но длина дуги окружности это – t в определении cos t.

Условно можно сказать, что арккосинус это «значение угла», на который ушла точка М от точки А. Если вспомните, то мы число t вводили как часть длины окружности, радиуса равного 1, и тогда 2π– вся окружность равна 360°, π– половина окружности =180°, $\frac{\pi}{3} = \frac{180^{\circ}}{3}$ =60°.



Пример 2. Вычислить arccos (- $\sqrt{3}/2$) .

Решение. Пусть arccos (- $\frac{\sqrt{3}}{2}$) = t. Тогда cos t = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и t $\in$ [0; π]. Значит, t = $\frac{5\pi}{6}$, так как cos $\frac{5\pi}{6}$ = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и [0; π]. Итак, arccos $(-\sqrt{3}/2)$ = $\frac{5\pi}{6}$.

Пример 3. Решить уравнение cos t = - $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Составим формулу решений: t = ± arccos (- $\frac{\sqrt{2}}{2}$)+ 2πk.

Вычислим значения арккосинуса: arccos (- $\frac{\sqrt{2}}{2}$) = π - arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = π - $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{3\pi}{4}$.

Подставим найденное значение в формулу решений $t = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k$ и получим значение t: $t = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$.

Пример 4. Решить неравенство $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

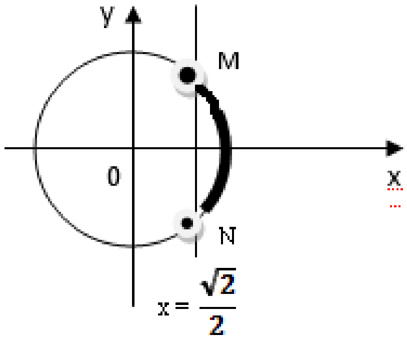


Рис. 8

Решение. Мы знаем, что cos t – это абсцисса точки M(t) на числовой окружности. Это значит, что нужно найти такие точки M(t) на числовой окружности, которые удовлетворяют неравенству $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. (рис. 8)

Прямая $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и N.

Неравенству $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ соответствуют точки открытой дуги MN. Точке M соответствует $\frac{\pi}{4}$, а точке N $-\frac{\pi}{4}$.

Значит, ядром аналитической записи дуги MN является неравенство $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$, а сама аналитическая запись дуги MN имеет вид

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

Пример 5. Вычислить $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = t$, тогда $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и t □ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = \frac{\pi}{3}$, так как $\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$ □ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

arcsin *a*	t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0
a	sin t	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0

Пример 6. Вычислить $\arcsin\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $\arcsin\frac{1}{2} = t$, тогда $\sin t = \frac{1}{2}$ и t □ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Значит, $t = -\frac{1}{2}$, так как $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6}$ □$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Итак, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Пример 7. Решить уравнение $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

1. Составим формулы решений:

$$t = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k; \qquad t = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k$$

2. Найдем значение арксинуса.

Так как $\sin(-t) = -\sin t = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $t = -\frac{\pi}{4}$, то $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$.

3. Поставим найденное значение в формулы решений. Тогда решение данного уравнения запишем в виде:

$$t = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \qquad t = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k$$

Выполним вычисления и получим $t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$.

Удобнее решение уравнения $\sin t = a$ записывать не двумя формулами, а одной

$$\left.\begin{array}{l} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \end{array}\right\} t = (-1)^n \arcsin a + \pi n; n \in \mathbf{Z}$$

Если n - четное число, то при четных $n = 2k$, получим первое решение $t = \arcsin a + 2\pi k$, и перед arcsin a стоит знак «+»

Если n нечетное число, то при нечетных $n = 2k+1$, получим $t = -\arcsin a + \pi(2k+1) = \pi - \arcsin a + 2\pi k$ и перед arcsin a стоит знак «–», а это второе решение уравнения.

Запишем решение примера 3 с помощью полученной формулы:

$$t = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n = (-1)^n \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$$

Пример 8. Решить неравенство $\sin t < \frac{1}{3}$.

Решение. Вспомним, что sin t – это ордината точки M(t), которая лежит на числовой окружности. То есть нам надо найти такие точки M(t) этой окружности, которые удовлетворяет неравенству $y < \frac{1}{3}$ (рис.9).

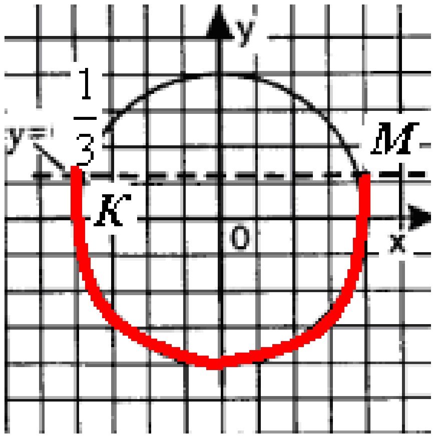


рис. 9

Прямая $y = \frac{1}{3}$ пересекает числовую окружность в двух точках M и K.

Неравенству $y < \frac{1}{3}$ соответствуют точки открытой дуги KM.

Точке K соответствует: $-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$, а точке M: $\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$.

Следовательно, решение неравенства запишем в виде:

$$-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k < t < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k .$$

Пример 10. Вычислить $\sin\left(\arcsin\frac{3}{16}\right)$.

Решение. Воспользуемся определением арксинуса. Пусть $\arcsin \frac{3}{16} = t$, тогда $\sin t = \frac{3}{16}$, причем $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Получили $\sin(\arcsin \frac{3}{16}) = \sin t = \frac{3}{16}$.

Пример 11. Вычислить $\cos(\arcsin \frac{5}{13})$.

Решение. Пусть $\arcsin \frac{5}{13} = t$, тогда $\sin t = \frac{5}{13}$, причем $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Используя основное тригонометрическое тождество ($\sin^2 t + \cos^2 t = 1$), выразим значение $\cos^2 t$: $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, т.к. $\sin^2 t = \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{25}{169})^2$,

тогда $\cos^2 t = 1 - \frac{25}{169}$. Выполним вычисления и получим $\cos^2 t = \frac{144}{169}$; извлечем квадратный корень $\cos t = \frac{12}{13}$ или $\cos t = -\frac{12}{13}$.

Так как $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, то косинус положительный, т.е. $\cos(\arcsin \frac{5}{13}) = \frac{12}{13}$.

Пример 12. Вычислить $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

Решение. Пусть $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = x$, тогда $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Итак, $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

arctg *a*	t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
a	tg *t*	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Пример 13. Вычислить $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

Решение. Используя равенство $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$, запишем :

$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3}$. Пусть $-\operatorname{arctg}\sqrt{3} = x$, тогда $-\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ и $\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Значит $-\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\operatorname{tg} x = -\frac{\pi}{3}$.

Пример 14. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 1$.

Решение.

1. Запишем формулу решений: $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi k$.
2. Найдем значение арктангенса: так как $\operatorname{tg} = \frac{\pi}{4}$, значит $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
3. Поставим найденное значение в формулу решений:

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$.

Пример 15. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -4{,}1$.

Решение. Запишем формулу решений: $x = \operatorname{arctg}(-4{,}1) + \pi k$.

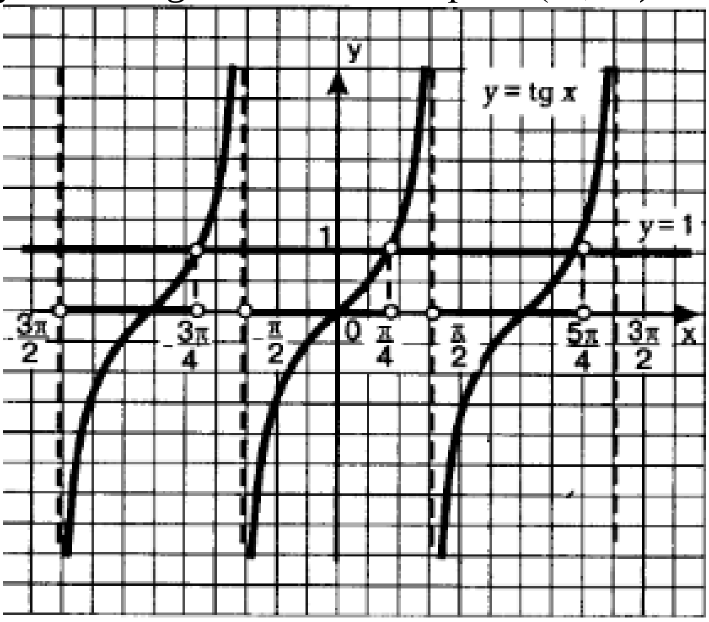
Вычислить значение арктангенса мы не можем, поэтому решение уравнения оставим в полученном виде.

Пример 16. Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

Решение. Неравенство будем решать графически.

1.Построим тангенсоиду $y = \operatorname{tg} x$ и прямую $y = 1$ (рис.10). Они пересекаются в точках вида $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$.

2. Выделим промежуток оси икс, на котором главная ветвь тангенсоиды расположена выше прямой y=1, так как по условию $\operatorname{tg} x > 1$. Это интервал $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$.



3. Используем периодичность функции. (Рис. 10 →)

Свойство 2. $y = \operatorname{tg} x$ – периодическая функция с основным периодом π.

Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, запишем ответ:

$$\left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{k};\ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{k}\right).$$

Ответ можно записать в виде двойного неравенства:

$$\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$$

Перейдем к уравнению $\operatorname{ctg} x = a$.

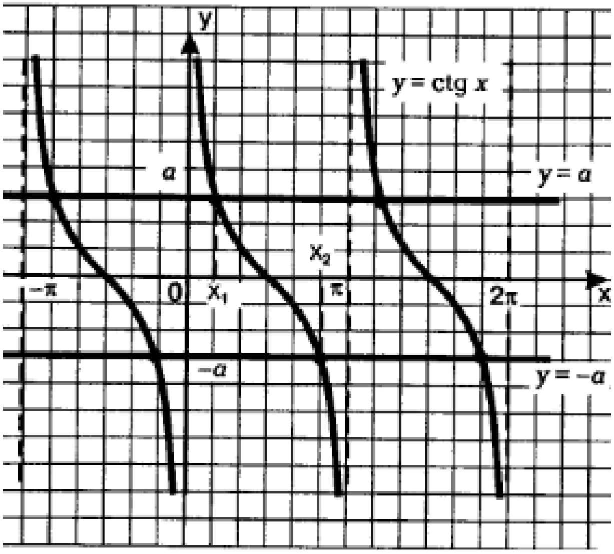


Рис. 11

Представим графическую иллюстрацию решения уравнения для положительного и отрицательного а.

Графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = a$ а также $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = -a$ имеют бесконечно много общих точек, абсциссы которых имеют вид:

$$x = x_1 + \pi\mathbf{k},$$

где x_1 – это абсцисса точки пересечения прямой $y = a$ с главной ветвью тангенсоиды и $x_1 = \operatorname{arcctg} a$; $x = x_2 + \pi\mathbf{k}$,

где x_2 – это абсцисса точки пересечения прямой $y = -a$ с главной ветвью тангенсоиды и $x_2 = \operatorname{arcctg}(-a)$. Заметим, что $x_2 = \pi - x_1$. Значит, запишем важное равенство: $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Практическое занятие 15 Теорема о трех перпендикулярах

Цель: продолжить освоение использования теоремы о трех перпендикулярах при решении задач

Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.

Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Пусть даны плоскость и не лежащая на ней точка:

- перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости;
  конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием перпендикуляра;
  расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость;
- наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости;
  конец отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием наклонной;
- отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется проекцией наклонной.

На рис. 12 из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B - основание перпендикуляра, точка C - основание наклонной, BC - проекция наклонной AC на плоскость α.

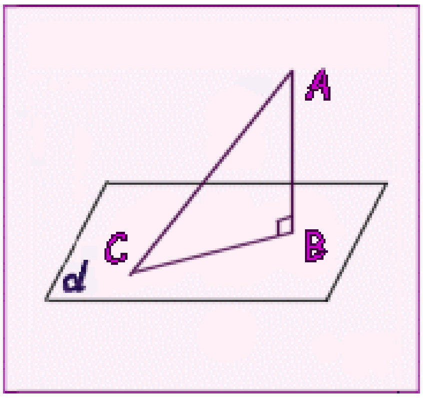


Рис. 12

Теорема о трех перпендикулярах:

Если прямая, проведенная на плоскости через **основание наклонной**, перпендикулярна ее **проекции**, то она перпендикулярна **наклонной**.

И обратно: Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и **проекции наклонной** (рис. 13 и 14)

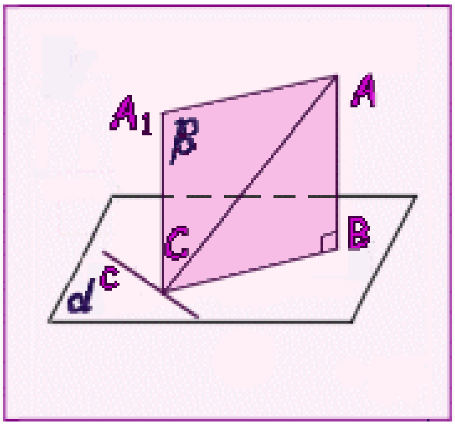


Рис.13

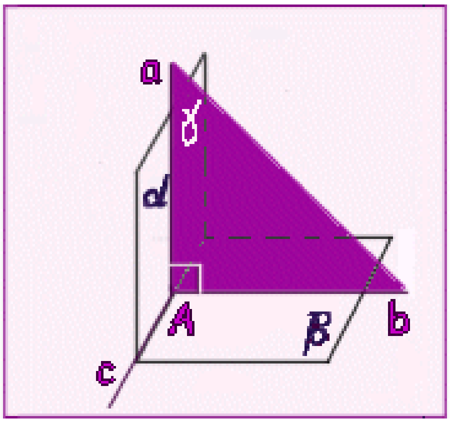


Рис.14

Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными*, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Пример 1. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника (рис. 15).

Решение.

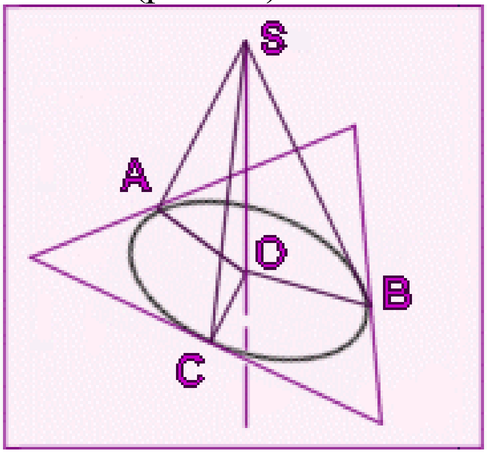


Рис. 15

Пусть A, B, C – точки касания сторон треугольника с окружностью, O – центр окружности и S – точка на перпендикуляре. Так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме о трех перпендикулярах отрезок SA есть перпендикуляр к этой стороне, а его длина – расстояние от точки S до стороны треугольника.

По теореме Пифагора SA=$\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{r^2+OS^2}$,

где r – радиус вписанной окружности.

Аналогично находим: $SB=\sqrt{r^2+OS^2}$, $SC=\sqrt{r^2+OS^2}$, т.е. все расстояния от точки S до сторон треугольника равны.

Контрольные вопросы

1. Что такое перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость?
2. Что такое проекция наклонной?

Практическая часть

1. Даны прямая *a* и плоскость α. Проведите через прямую *a* плоскость, перпендикулярную плоскости α.

2. Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

3. Из точки к плоскости проведены две наклонные, одна из которых на 20см больше другой. Проекции наклонных равны 10 см и 30 см. Найдите наклонные.

4. Сторона квадрата равна 4 см. Точка, равноудаленная от всех вершин квадрата, находиться на расстоянии 6 см от точки пересечения его диагоналей. Найдите расстояние от этой точки до вершин квадрата.

5. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.

6. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2:3.

7. Прямая a перпендикулярна плоскости АВС, угол АСВ равен 90^o, AC = 4, MD=3. Найти MC.

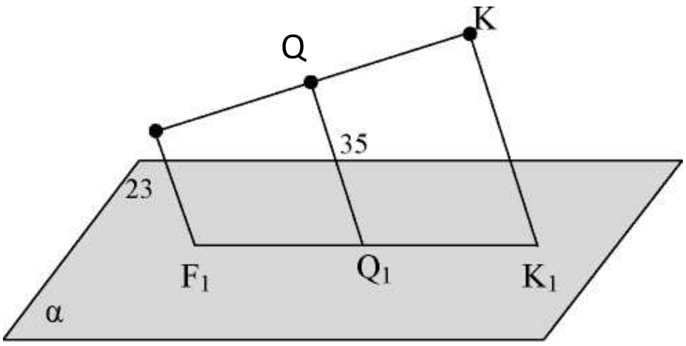
8. Прямая *a* перпендикулярна плоскости АВС. MD = 13. AC = 15, BC = 20. AC $\perp$BC, MD $\perp$AB. Найти MC.

9. Катеты прямоугольного треугольника АВС (С =90°) равны 4 см и 3 см. Точка М находится на расстоянии $\sqrt{6}$ см от плоскости треугольника АВС и на одинаковом расстоянии от всех его вершин. Найти расстояние от точки М до вершин треугольника.

Практическое занятие 15 (продолжение)
Признаки взаимного расположения прямых. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости

Цель: отработать навыки решения задач, связанных с основными понятиями и теоремами стереометрии; развить математическое мышление**,** наблюдательность, привычку аккуратно вести преобразования.

Указания к выполнению практической работы



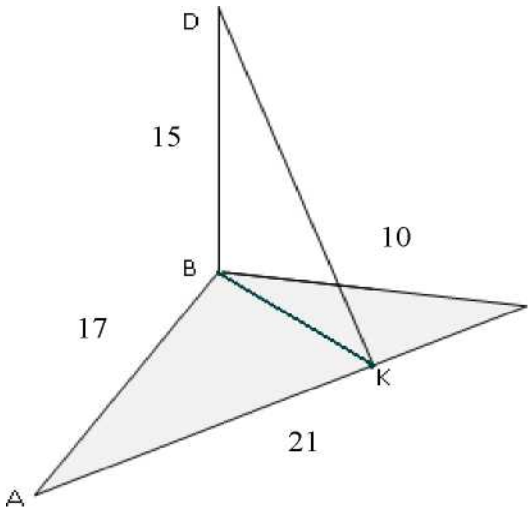
№ 1. Через концы отрезка FK и его середину Q проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость a в точках F_1 Q_1 K_1. Найти длину отрезка KK_1 если отрезок FK не пересекает плоскость a и FF_1=23, QQ_1=35.

Решение

Так как прямые FF_1 QQ_1, KK_1 параллельны и пересекают одну и ту же прямую FK, то все они находятся в одной плоскости. Обозначим ее р. Тогда $FK=F_1K_1$. Фигура FKK_1F_1 - трапеция с основаниями FF_1 и KK_1. Поэтому QQ_1 - средняя линия трапеции.

$QQ_1 = \dfrac{FF_1 + KK_1}{2}$ $\quad 35 = \dfrac{23+KK_1}{2}$ $\quad 70 = 23 + KK_1$ $\quad KK_1 = 70-23 = 47$

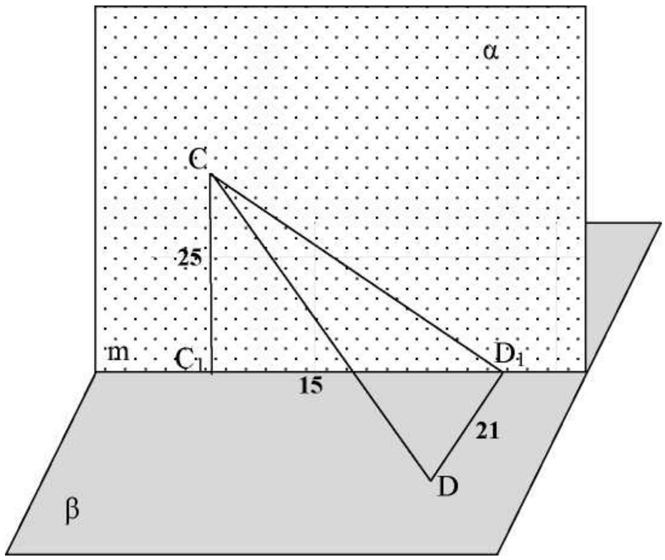
Ответ: 47



№ 2. Стороны треугольника ABC равны 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего ZB треугольника проведен к его плоскости перпендикуляр BD, равный 15 см. Найти расстояние от точки D до большей стороны треугольника.

№ 3. Из точки A, находящейся вне плоскости a, проведены перпендикуляр AO=12 и две наклонные, образующие с плоскостью углы 30^0, а угол между их проекциями 120^0. Найти расстояние между основаниями наклонных.

№ 4. Из точек C и D, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры CC_1 и DD_1 на прямую пересечения плоскостей m. Найти длину отрезка CD, если CQ=25, DD_1=21, C_1D_1=15.



Практическое занятие 16
Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей.

Цель: освоить признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей.

Теоретическая часть

Признаки параллельности прямой и плоскости

1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности плоскостей

1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки перпендикулярности прямой и плоскости

1) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

2) Если плоскость перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Наклонная к плоскости

Прямая, пересекающая плоскость и не перпендикулярная ей, называется наклонной к плоскости.

Теорема о трёх перпендикулярах

Прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная проекции, наклонной к этой плоскости, перпендикулярна и самой наклонной.

Признаки параллельности прямых в пространстве

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Признак перпендикулярности плоскостей

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

*Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым***.**

Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. В треугольнике ABC середины сторон AB и BC лежат в плоскости α, а сторона AC не лежит в этой плоскости. Докажите, сто прямая AC параллельна плоскости α.

2. Известно, что прямые a и b параллельны, прямая a перпендикулярна плоскости α, прямая c лежит в плоскости α. Каково взаимное расположение прямых b и c? Сделайте чертеж и обоснуйте ответ

3. Дан прямоугольник со сторонами 3 и 4см, в точке пересечения диагоналей прямоугольника восстановлен перпендикуляр к плоскости прямоугольника, длина которого 7см. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до вершин прямоугольника.

Вариант 2

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выпишите: а) две пары ребер, принадлежащих параллельным прямым; б) две пары ребер, принадлежащих скрещивающимся прямым; в) две пары граней, принадлежащих параллельным плоскостям.

2. Длина наклонной 18 см. Угол между наклонной и плоскостью 30^0. Чему равна длина проекции наклонной на эту плоскость?

3. Дан прямоугольный треугольник со сторонами 3 и 4см, в вершине острого угла восстановлен перпендикуляр к плоскости треугольника, длина которого 7см. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до вершин треугольника.

Вариант 3

1.Прямые a и c параллельны, а прямые a и b пересекаются. Могут ли прямые b и c быть параллельными? Ответ обоснуйте.

2. Точки A и B расположены по одну сторону плоскости α, AC и BD – перпендикуляры к этой плоскости, AC=6 см, BD=3 см, CD=18 см. Найдите расстояние между точками A и B.

3. Дан прямоугольник со сторонами 3 и 4см, в точке пересечения диагоналей прямоугольника восстановлен перпендикуляр к плоскости прямоугольника, длина которого 7см. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до сторон прямоугольника.

Вариант 4

1.Даны параллелограмм ABCD и точка P, не лежащая в плоскости ABC. Как расположена прямая AC и плоскость PBD? Ответ обоснуйте

2. Прямая a перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых c и d, принадлежащих плоскости α. Прямая b параллельна прямой a. Как расположена прямая b по отношению к плоскости α? Сделайте чертеж ответ обоснуйте.

3. Из точки лежащей вне плоскости проведены к этой плоскости две наклонные под углом 30^0, равные $2\sqrt{3}$. Их проекции образуют между собой угол 120^0. Определить расстояние между основаниями наклонных.

Контрольные вопросы

1. Что такое стереометрия?
2. Сформулируйте аксиомы стереометрии.
3. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
4. Какие прямые называются скрещивающимися?
5. Что значит: прямая и плоскость параллельны?
6. Признак параллельности прямой и плоскости.
7. Какие плоскости называются параллельными? Докажите призрак параллельности плоскостей.
8. Докажите, что если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
9. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны.

10. Перечислите случаи взаимного расположения в пространстве: а) двух прямых; б) прямой и плоскости; в) двух плоскостей.
11. Перечислите свойства параллельного проектирования.
12. Что называется углом между: а) двумя прямыми; б) прямой и плоскостью; в) между двумя плоскостями?
13. Дайте определение: а) двугранного угла; б) линейного угла двугранного угла.
14. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
15. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
16. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
17. Сформулируйте теоремы о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве.
18. Что такое перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость?
19. Что называется расстоянием от точки до плоскости ?
20. Что такое наклонная, проведенная из данной точки к плоскости? Что такое проекция наклонной?
21. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах.

Практические занятия 17, 26

Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве.

Цель: освоить понятия о расстоянии от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстоянии между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве.

Теоретическая часть

Расстояние от точки до плоскости

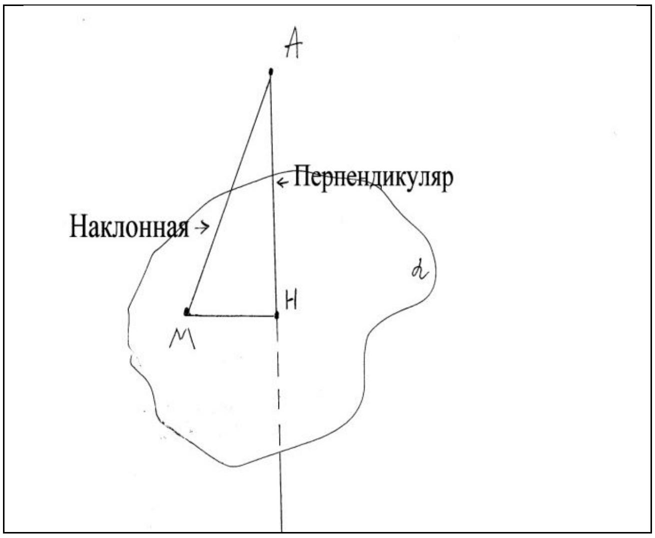
Через точку А, не лежащую на плоскости α, можно провести только одну прямую, перпендикулярную к этой плоскости.

Дана плоскость α и точка А, не лежащая на ней.

Проведем из точки А прямую, перпендикулярную к плоскости α. Обозначим буквой Н точку пересечения проведенной прямой с плоскостью α.

Определение: Перпендикуляром, проведенным из точки А к плоскости α, называется отрезок АН. Точка Н называется основанием этого перпендикуляра.

Возьмем произвольную точку М, принадлежащую плоскости α и отличную от Н. Соединим точки А и М.



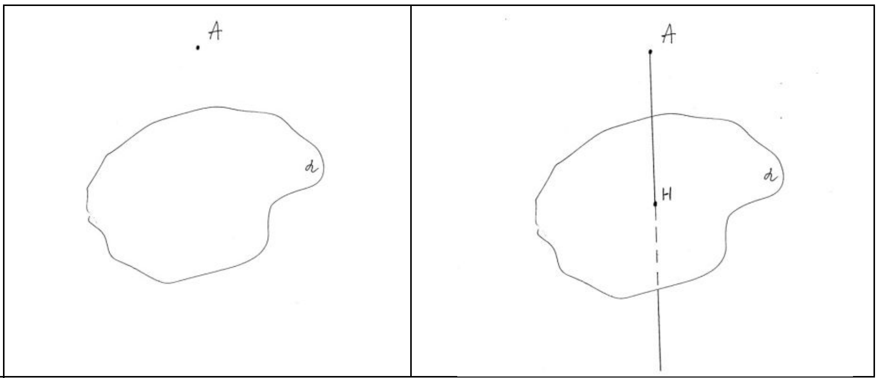
Отрезок АМ называется наклонной, проведенной из точки А к плоскости α. Точка М называется основанием наклонной.

Соединим точки М и Н.

Отрезок МН называется проекцией наклонной АМ на плоскость α.

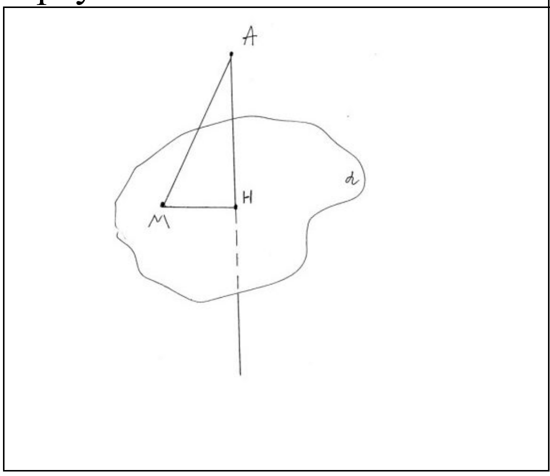
Имеется точка А и два отрезка, проведенных из этой точки к плоскости α: отрезок АН и отрезок АМ. Как вы думаете, какой из этих отрезков меньше?

Рассмотрим отрезки АН и АМ.



Перпендикуляром, проведенным из точки А к плоскости α, называется отрезок АН. Точка Н называется основанием этого перпендикуляра.

Для этого рассмотрим треугольник АНМ.



Это прямоугольный треугольник, так как угол АНМ равен 90 градусам (так как АН перпендикулярна плоскости α). Тогда сторону АН можно назвать катетом, а сторону АМ гипотенузой. Но гипотенуза всегда больше катета. Поэтому АН < АМ.

Перпендикуляр, проведенный из точки, не лежащей на плоскости, к этой же плоскости, всегда меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой же плоскости.

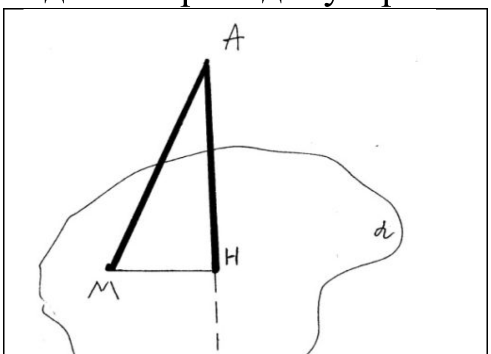
Таким образом из всех расстояний от точки А до разных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки Н.

Расстоянием от точки А до плоскости α называется длина перпендикуляра АН, проведенного к плоскости α.

Практическая часть

Рассмотрим решение типовой задачи по теме.

Из точки А, не принадлежащей плоскости α, проведены перпендикуляр АО и две равные наклонные АМ и АН. Известно, что АО = 3 единицам, АМ = АН = 5 единицам. Найти расстояние между основаниями наклонных.



Решение:

Из прямоугольного треугольника АОМ найдем ОМ по теореме Пифагора. $OM^2 = 25 - 9 = 16$ или ОМ=4 единицы. Тогда МН=2*ОМ = 8 ед.

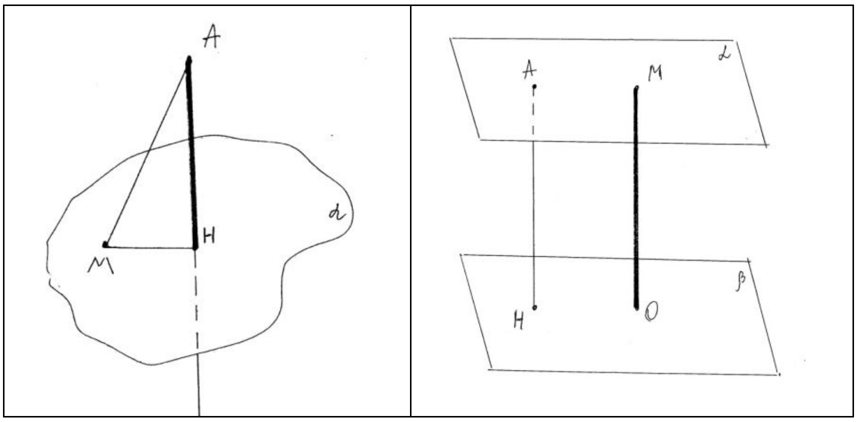
Ответ: МН=8 ед.

Рассмотрим три замечания к теме, которые необходимы для решения задач.

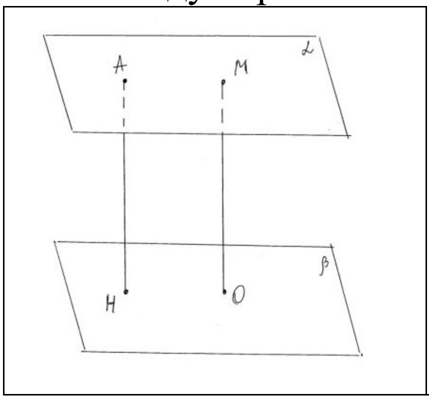
Замечание 1

Пусть даны две параллельные плоскости α и β. Тогда все точки плоскости α будут равноудалены от плоскости β.

Действительно. На плоскости α взяты произвольные точки А и М. Из этих точек на плоскость β опустим перпендикуляры АН и МО соответственно. Следовательно, перпендикуляр АН параллелен перпендикуляру МО.



Эти перпендикуляры будут равными, по второму свойству параллельности плоскостей, которое звучит так: отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой.

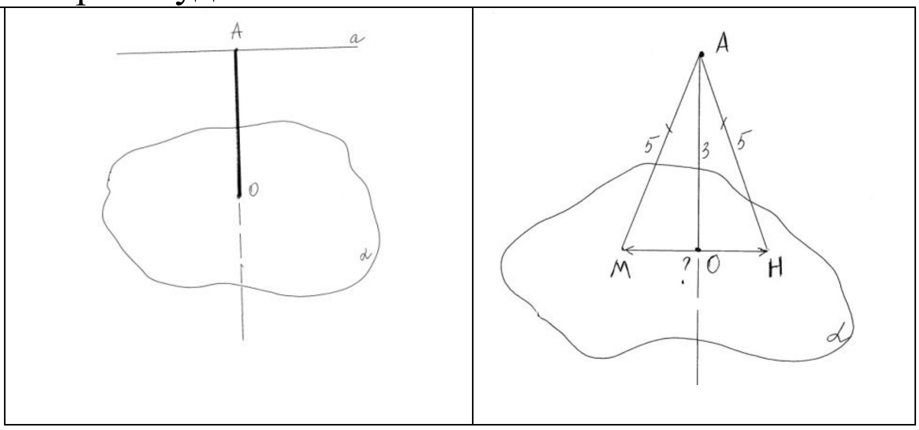
На рис расстоянием между параллельными плоскостями α и β является отрезок, например, МО.

Замечание 2

Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости.

Выберем любую точку А на прямой а, опустим перпендикуляр АО на плоскость α.

Длина перпендикуляра АО называется расстоянием между прямой а и параллельной ей плоскостью α.



Задача.

Найдите расстояние между прямой МН и плоскостью параллельного ей прямоугольника АВСД, если известно, что МН=6см; угол МНО=45 градусам.

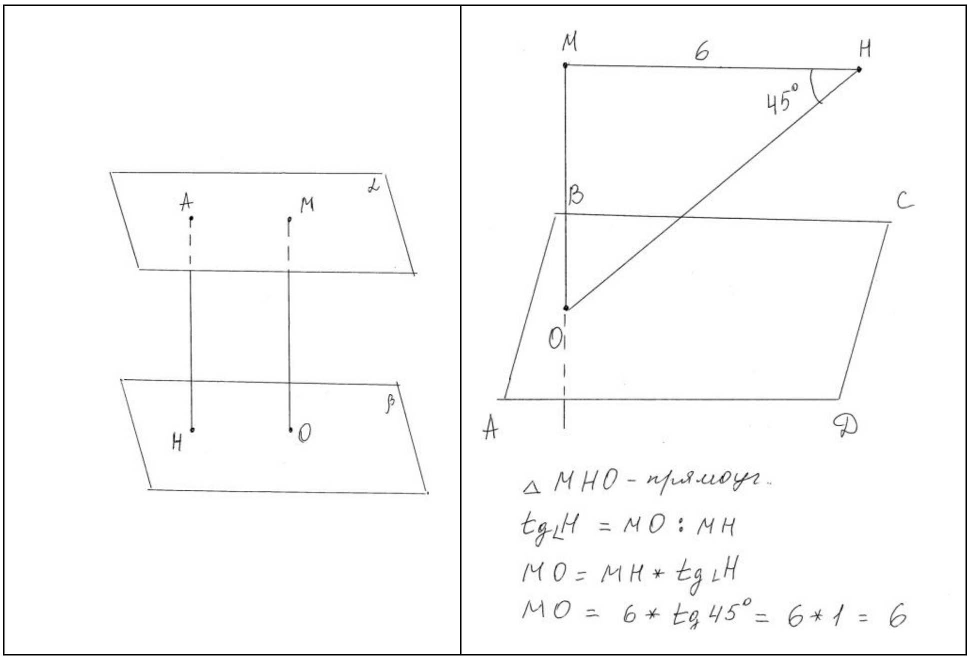
Решение:

ΔАОМ: $OM^2=AM^2-AO^2$

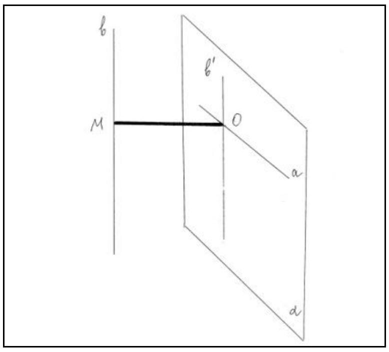
$OM^2 = 25 - 9 = 16$

ОМ=4,

МН=2*ОМ = 8 ед



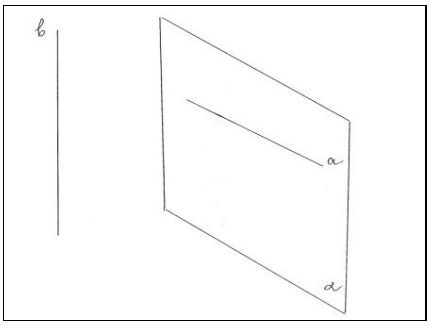
Дано: MH || АВСД; MH=6см; ∠MHO=45°; MO ⊥ АВСД Найти: MO



Решение:

∆MHO прямоугольный. Используя определения тригонометрической функции тангенс (Тангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету), имеем MO=tg45°*6=1*6=6см

Ответ: 6см



Замечание 3

Пусть прямые a и b скрещивающиеся. Тогда плоскость α, проходящая через прямую a, параллельна прямой b (по теореме: через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой и притом только одна.).

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой.

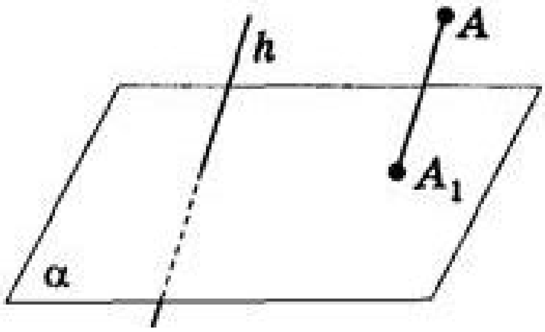
На рис расстоянием между скрещивающимися прямыми a и b является отрезок MO.

Практическое занятие 18
Параллельное проектирование и его свойства. Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника. Взаимное расположение пространственных фигур

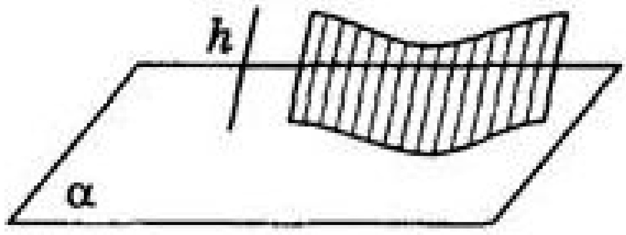
Цель: освоить понятия о параллельном проектировании и его свойства. разобрать теорему о площади ортогональной проекции многоугольника. Изучить взаимное расположение пространственных фигур.

Теоретическая часть

Пусть дано произвольную плоскость α, точка A (рис.) и прямую h, которое пересекает плоскость α. Проведем через точку A прямую, которая параллельна h, она пересекает плоскость α в некоторой точке A_1. Найденную таким образом точку A называют параллельной проекцией точки A на плоскость α в направлении h.



Прямую h называют проекционной прямой, плоскость α - плоскостью проекций.



Чтобы построить проекцию какой-либо фигуры, надо спроектировать на плоскость проекции каждую точку данной фигуры (рис.). Приведем некоторые свойства параллельного проектирования.

Теорема. Если отрезки, которые проектируются, не параллельны проектирующей прямой, то при параллельном проектировании:

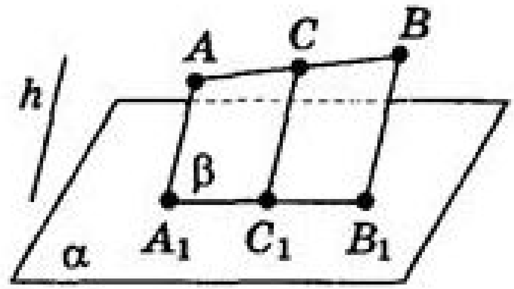
1) отрезки изображаются отрезками;

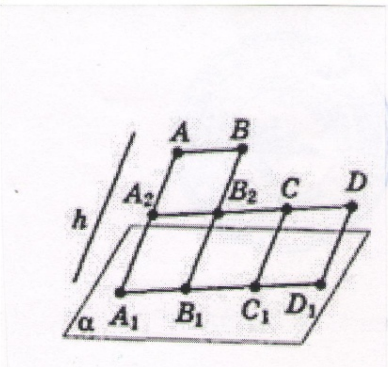
2) параллельные отрезки изображаются параллельными отрезками или отрезками одной прямой;

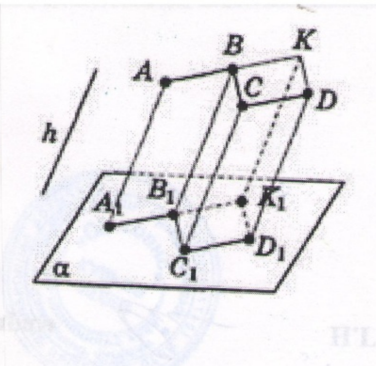
3) отношение длин параллельных отрезков и отрезков одной прямой сохраняется.

Доказательство

1) Все прямые, которые проектируют точки отрезка AB лежат в одной плоскости β, которая пересекает плоскость α по прямой A_1B_1 (рис.). Следовательно, проекцией отрезка есть отрезок, причем произвольная точка C отрезка AB изображается точкой C_1 отрезка A_1B_1.







2) Пусть отрезки AB и CD, которые проектируются, параллельные. Все прямые, которые их пересекают и параллельные h, заполняют или части одной плоскости (рис.), или параллельных плоскостей (рис.).

Эти части плоскостей пересекают плоскость a соответственно или по отрезкам одной прямой, или по параллельным отрезкам A_1B_1 и C_1D_1.

3) Если отрезки AB и CB, которые проектируют, размещены на одной прямой (см. рис.), то по теореме о пропорциональных отрезках имеем: $A_1C_1 : C_1B_1 = AC : CB$.

Если отрезки AB и CD параллельны, а их проекции A_1B_1 и C_1D_1 лежат на одной прямой (см. рис.), то ABB_2A_2 - параллелограмм. В этом случае $A_1B_1 : C_1D_1 = A_2B_2 : CD = AB : CD$. Наконец, если проекции A_1B_1 и C_1D_1 данных отрезков AB и CD не лежат на одной прямой (см. рис.), то построим параллелограмм CDKB. Его проекция - параллелограмм CDKB. Итак, имеем: $A_1B_1 : C_1D_1 = A_1B_1 : B_1K_1 = AB : BK = AB : CD$.

Практическая часть

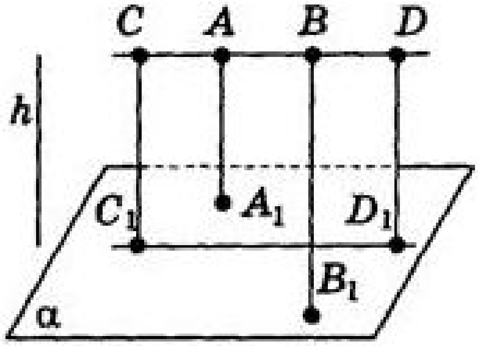
1. При каком положении отрезка относительно плоскостей проекции его проекция: а) равна самому отрезку; б) есть точка?

2. Отрезок проецируется параллельно на плоскость. Как проектируется середина отрезка на эту плоскость?

3. Может ли проекция отрезка быть больше отрезка, который проектируют?

4. Могут непараллельные прямые проектироваться в параллельные прямые? Приведите примеры.

5. Как расположены точки A и B относительно плоскости CDD_1C_1 (рис.)?



6. Плоскость фигуры не параллельна направлению проектирования. В какую фигуру проектируется: а) треугольник; б) параллелограмм?

Практическое занятие 19
Векторы. Действия с векторами

Цель: освоить операции над векторами, вычисление модуля и скалярного произведения.

Теоретическая часть

Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и нулевой вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются ***компланарными***, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Векторы называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему. Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение: $\vec{b} = \alpha\,\vec{a};\quad |\vec{b}| = \alpha|\vec{a}|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ ***сонаправлен*** с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ ***противоположно направлен*** с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Длина вектора $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ находится по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

Пример 1. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4,\quad |\vec{b}| = 6,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3.$ $15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15$

$|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot16 - 28\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2} +$

$+ 12\cdot36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$

Пример 2. Найти скалярное произведение векторов

$2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1,\quad |\vec{b}| = 2,\quad |\vec{c}| = 3,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{b}\wedge\vec{c} = \frac{\pi}{3}.$

$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a} + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 14\vec{a}\cdot\vec{c} + 15\vec{a}\cdot\vec{b} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 21\vec{b}\cdot\vec{c} +$
$+ 20\vec{c}\cdot\vec{a} + 24\vec{b}\cdot\vec{c} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10\,\vec{a}\cdot\vec{a} + 27\vec{a}\cdot\vec{b} + 34\vec{a}\cdot\vec{c} + 45\vec{b}\cdot\vec{c} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10 +$

$+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.$

Пример 3. При каких значениях m длина вектора $\vec{a}(\sqrt{15}, -m, 2)$ равна 10?

$|\vec{a}| = \sqrt{\sqrt{15}^2 + (-m)^2 + 2^2}$; $\quad 10 = \sqrt{19 + m^2}$; $100 = 19 + m^2$;

$|\vec{a}| = \sqrt{15 + m^2 + 4}$; $|\vec{a}| = \sqrt{19 + m^2}$; $\quad 81 = m^2$; $m = \pm9$

Контрольные вопросы

1. Какие направленные отрезки называются равными?
2. Что называется вектором?
3. Что называется длиной вектора?

Практическая часть

1. Построить точку А (2,3,1) на координатной плоскости
2. Даны точки А (2,-4,0), В (0,5,0), С (0,0,-1), К(-4,0,-2), Е (3,4,5)

1. Укажите среди них точки, которые лежат на оси z, в плоскости *xy*
2. Даны точки А (2,-1,0) и В (-4,2,2). Найдите длину отрезка АВ
3. Даны точки А (2,4,0) и В (-4,1,2). Найдите координаты точки С, если точка В – середина отрезка АС.
4. Даны вектор $\vec{a}$(2, 2,6), число λ =-5. Найдите вектор $\vec{a}\,\lambda$
5. При каких значениях m длина вектора $\vec{a}(\sqrt{8}, m, 1)$ равна 5?
6. Найти все значения m при которых длина вектора $\vec{a}(m, \sqrt{6}, 4)$ больше 47?
7. Найти длину вектора $\vec{AB}$ по заданным координатам его концов A(1, 2, -1) и B(3, -1, -2).
8. Даны векторы $\vec{a}$(1, 5, 6), $\vec{b}$ (0, 2, -3) и $\vec{c}$=3$\vec{a}$-7$\vec{b}$. Определить длину вектора $\vec{c}$.
9. Найти длину основания равнобедренного треугольника с вершинами в точках А(2,3,1), В(1,3,3), С(2,4,3)
10. Построить точку А (2,1,3) на координатной плоскости
11. Даны точки А (2,-4,0), В (0,5,0), С (0,0,-1), К(-4,0,-2), Е (3,4,5)
12. Укажите среди них точки, которые лежат на оси у, в плоскости xz
13. Даны точки А (5,-2,0) и В (-1,4,3). Найдите длину отрезка АВ
14. Даны точки А (5,3,0) и В (-1,2,3). Найдите координаты точки С, если точка В – середина отрезка АС.
15. Даны вектор $\vec{a}$(1, 1,5), число λ =-4. Найдите вектор $\vec{a}\,\lambda$

Практическое занятие 20
Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения, развертки многогранников. Вычисление площадей и объемов

Цель: научить изготовлению геометрических тел из подручных материалов

Теоретическая часть

Многогранник – это тело, граница которого состоит из кусков плоскостей (многоугольников). Эти многоугольники называются гранями, их стороны – рёбрами, их вершины – вершинами многогранника. Отрезки, соединяющие две вершины и не лежащие на одной грани, называются диагоналями многогранника. Многогранник – выпуклый, если все его диагонали расположены внутри него.

Призма – это многогранник, две грани которой (основания призмы) – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани- параллелограммы, плоскости которых параллельны прямой. Параллелограммы называются боковыми гранями; рёбра называются боковыми рёбрами. Высота призмы – это любой перпендикуляр, опущенный из любой точки основания на плоскость другого основания. В зависимости от формы многоугольника, лежащего в основании, призма может быть соответственно: треугольной, четырёхугольной, пятиугольной, шестиугольной и т.д. Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к плоскости основания, то такая призма называется прямой; в противном случае – это наклонная призма. Если в основании прямой призмы лежит правильный многоугольник, то такая призма также называется правильной.

Параллелепипед - это призма, основания которой параллелограммы. Таким образом, параллелепипед имеет шесть граней и все они – параллелограммы. Противоположные грани попарно равны и параллельны. У параллелепипеда четыре диагонали; они все пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Если четыре боковые грани параллелепипеда – прямоугольники, то он называется прямым. Прямой параллелепипед, у которого все шесть граней – прямоугольники, называется прямоугольным. Диагональ прямоугольного параллелепипеда d и его рёбра a, b, c связаны соотношением: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Прямоугольный параллелепипед, все грани которого квадраты, называется кубом. Все рёбра куба равны.

Пирамида – это многогранник, у которого одна грань (основание пирамиды) – это произвольный многоугольник, а остальные грани (боковые грани) – треугольники с общей вершиной S, называемой вершиной пирамиды. Перпендикуляр SO, опущенный из вершины пирамиды на её основание, называется высотой пирамиды. В зависимости от формы многоугольника, лежащего в основании, пирамида может быть соответственно: треугольной, четырёхугольной, пятиугольной, шестиугольной и т.д. Треугольная пирамида является тетраэдром (четырёхгранником), четырёхугольная – пятигранником и т.д. Пирамида называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник, а её высота падает в центр основания. Все боковые рёбра правильной пирамиды равны; все боковые грани – равнобедренные треугольники. Высота боковой грани называется апофемой правильной пирамиды.

Если провести сечение, параллельное основанию пирамиды, то тело, заключённое между этими плоскостями и боковой поверхностью, называется усеченной пирамидой. Параллельные грани называются основаниями; расстояние между ними – высотой. Усечённая пирамида называется правильной, если пирамида, из которой она была получена – правильная. Все боковые грани правильной усечённой пирамиды – равные равнобочные трапеции. Высота боковой грани называется апофемой правильной усечённой пирамиды.

Объемы многогранников:

1. Объем призмы: $V = SH$
2. Объем параллелепипеда: $V = abc$
3. Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3}SH$
4. Объем усеченной пирамиды: $V = \frac{1}{3}h \cdot (S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$

Пример 1. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 0,5 и 16 см. Найдите ребро равновеликого ему куба.

Решение:

Объем параллелепипеда: $V = abc$

$V = 1 \cdot 0{,}5 \cdot 16 = 8$ см

Объем параллелепипеда равен объему куба. $V = a^3$

$8 = a^3$ $\quad a = 2$

Многогранник называется правильным, если все его грани - равные между собой правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число граней. Известно только 5 правильных многогранников:

- тетраэдр (4 грани, рис.1);
- куб (6 граней, рис.2)
- октаэдр (8 граней, рис.3);
- додекаэдр (12 граней, рис.4);
- икосаэдр (20 граней, рис.5).

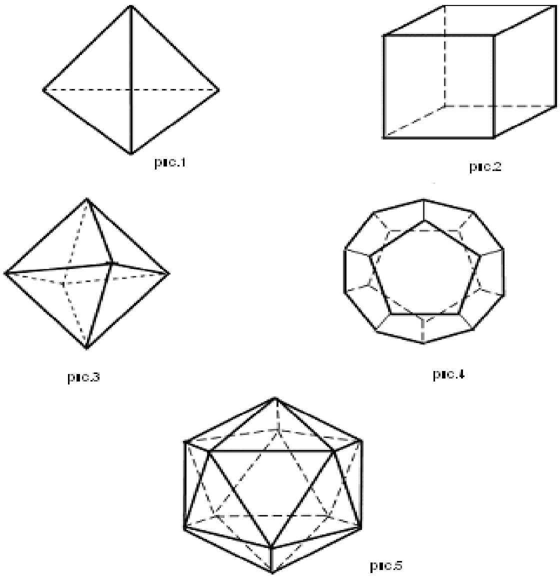


Рис. 16 Изображения многогранников

Конус - тело, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (вершины конуса) и проходящих через плоскую поверхность. Иногда конусом называют часть такого тела, полученную объединением всех отрезков, соединяющих вершину и точки плоской поверхности (последнюю в таком случае называют основанием конуса, а конус называют опирающимся на данное основание). Так же можно сказать что это тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. Отрезок, соединяющий вершину и границу основания, называется образующей конуса. Объединение образующих конуса называется образующей (или боковой) поверхностью конуса. Отрезок, опущенный перпендикулярно из вершины на плоскость основания (а также длина такого отрезка), называется высотой конуса. Если основание конуса имеет центр симметрии (например, является кругом или эллипсом) и ортогональная проекция вершины конуса на плоскость основания совпадает с этим центром, то конус называется прямым. При этом прямая, соединяющая вершину и центр основания, называется осью конуса.

Косой (наклонный) конус — конус, у которого ортогональная проекция вершины на основание не совпадает с его центром симметрии. Круговой конус — конус, основание которого является кругом. Прямой круговой конус (часто его называют просто конусом) можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (эта прямая представляет собой ось конуса. Часть конуса, лежащая между основанием и плоскостью, параллельной основанию и находящейся между вершиной и основанием, называется усечённым конусом.

В окружающей нас действительности встречается много предметов, имеющих форму цилиндра, например ведро, консервная банка, пенал, кусок проволоки круглого сечения и т. д. ***Цилиндр*** может быть образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Цилиндр имеет два основания, которые являются кругами, и боковую поверхность, которая называется цилиндрической поверхностью. Если боковую поверхность цилиндра развернуть и положить на плоскость, то получим прямоугольник. Развёртка полной поверхности цилиндра состоит из прямоугольника, длина которого равна длине окружности основания цилиндра, а высота — высоте цилиндра и двух кругов.

Контрольные вопросы

1. Что называется призмой?
2. Что называется правильной призмой?
3. Что называется прямой призмой?
4. Дайте определение многограннику.
5. Дайте определение параллелепипеду.
6. Охарактеризуйте пирамиду?
7. В каком случае пирамида называется усеченной?
8. Дайте определение апофемы.
9. Какой многогранник называется правильным?
10. Сколько граней у тетраэдра?
11. Сколько граней у куба?
12. Сколько граней у октаэдра?
13. Сколько граней у додекаэдра?
14. Сколько граней у икосаэдра?
15. Дайте определение конуса.
16. Дайте определение цилиндра.
17. Как вычислить объем призмы?
18. Как вычислить объем параллелепипеда?
19. Как вычислить объем пирамиды?
20. Как вычислить объем усеченной пирамиды?

Практическая часть

1. Изготовьте из любого материала фигуру по выбору: призма, прямая призма, правильная призма, параллелепипед, прямой параллелепипед, куб, пирамида, усеченная пирамида.

2. Изготовьте из любого материала фигуру по выбору: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

3. Изготовьте из любого материала фигуру по выбору: конус, цилиндр.

4. Изготовьте из любого материала фигуру по выбору: призма, прямая призма, правильная призма, параллелепипед, прямой параллелепипед, куб, пирамида, усеченная пирамида и вычислите его объем.

Практическое занятие 21
Уравнение окружности, сферы, плоскости. Расстояние между точками. Действия с векторами, заданными координатами. Скалярное произведение векторов. Векторное уравнение прямой и плоскости. Использование векторов при доказательстве теорем стереометрии

Теоретическая часть

Цель: формировать у обучающихся умение решать задачи на данную тему.

Общее уравнение прямой имеет вид: где – x,y некоторые числа. При этом коэффициенты одновременно не равны нулю, так как уравнение теряет смысл.

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, которые не лежат на одной прямой, можно составить по формуле: $Ax+By+Cz+D=0$
Уравнение поверхности сферы: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = (z - c)^2 = R^2$
Сфера радиуса R с центром в начале координат представлена уравнением второй степени. $x^2+y^2+z^2=R^2$ (R – радиус сферы).

Сфера радиуса R, центр которой не совпадает с началом координат, представлена другим уравнением второй степени.
$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ (R - радиус сферы; a, b, c - смещение центра сферы относительно центра координат)

Пример: Найти уравнение прямой, проходящей через две точки: (-1, 2) и (2, 1).

Решение. По уравнению полагая в нем $x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 2, y_2 = 1$ (без разницы, какую точку считать первой, какую - второй), получим или после упрощений получаем окончательно искомое уравнение в виде $x + 3y - 5 = 0$.

Применение изученного материала к решению заданий

Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса R = 5 с центром в начале координат.
Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке С (2; -3; 5) и радиусом, равным 6.
Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 =100$.
Задача 4. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ является уравнением сферы.
Задача 5. Составить уравнение плоскости по точкам.
Задача 6. Составить уравнение прямой по точке и направляющему вектору.
Задача 7. Составить уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

Задача 8. Составить уравнение прямой по точке и направляющему вектору.
Задача 9. Составить уравнение прямой по двум точкам.

Ответы (один из вариантов решений):
Задача 1. Составить уравнение сферы радиуса R = 5 с центром в начале координат.
Решение: Непосредственной подстановкой значения радиуса в уравнение
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ получим $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Задача 2. Написать уравнение сферы с центром в точке С (2; -3; 5) и радиусом, равным 6.
Решение. Подставим значение координат точки С и значение радиуса в уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$

получим $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 36$.

Задача 3. Найти центр и радиус сферы $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 100$.
Решение. Сравнивая данное уравнение с уравнением сферы
$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ видим, что $a = - 4, b = 3, c = 0, R = 10$.

Следовательно, С (- 4; 3; 0), R = 10.

Задача 4. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ является уравнением сферы.
Решение. Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив квадраты двучленов, содержащих соответственно x, y и z:
$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 5 = (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 3)^2 - 9 + 5 =$
$= (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 9$.
Следовательно, данная поверхность имеет уравнение

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9.$$

Это уравнение представляет собой уравнение сферы с центром в точке С (1; -2; 3) и радиусом $R = 3$

Практическое занятие 22

Числовая последовательность, способы ее задания, вычисления членов последовательности. Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Цель: закрепить умения вычислять пределы числовой последовательности, предела функции, используя теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших, теоремы о конечных пределах и правила раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Справочный материал

Определение: Функцию $y = f(x), x \in N$ называют числовой последовательностью
$y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$ - члены числовой последовательности

Примеры числовых последовательностей: 1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел.

Способы задания последовательностей:

1. Перечислением членов последовательности.
2. Заданием аналитической формулы.

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, 2n-1, … - возрастающая последовательность.
Пример: 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2n–1), … - убывающая последовательность.

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ ***Число а называется пределом числовой последовательности***

$\{y_n\}$: Если y_n $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то называют *бесконечно малой величиной (бм)*

Если y_n $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то называют *бесконечно большой величиной (бб)*

Теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях

1) м $\pm$ бм = бм 2) бм * бм = бм 3) бм * огр = бм 4) $\frac{\text{îãð}}{\text{áì}} = \text{áá}$

5) бб + бб = бб 6) бб * бб = бб 7) бб * огр = бб 8) $\frac{\text{îãð}}{\text{áá}} = \text{áì}$

Свойства пределов:

$$\lim_{n\to\infty} \text{õ}_n = b \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \text{ñ}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\text{õ}_n + \text{ó}_n\right) = b + c$$

1) предел суммы равен сумме пределов:
2) предел произведения равен произведению пределов:
3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\text{õ}_n}{\text{ó}_n}\right) = bc \quad \lim_{n\to\infty}\left(k\text{õ}_n\right) = kb$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

Порядок работы

Задание 1. Вычислите пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$

Решение

что последовательности $\frac{3}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ являются бесконечно малыми, и используя свойства бесконечно малых последовательностей, окончательно будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1}=0. \text{ Итак, } \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}=0.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}$

Решение

Разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень n, т.е. на $n^3\neq 0$ при $n\to+\infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}.$$

При $n\to+\infty$ последовательность $\left(1-\frac{1}{n^3}\right)$ является сходящейся и имеет предел, равный 1, а последовательность $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)$ является бесконечно малой и имеет предел, равный 0, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}=+\infty$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=+\infty$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1}$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

[Здесь первоначально числитель и знаменатель дроби умножили на ненулевое сопряженное выражение $\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)$.]

Задание 2. Вычислите пределы функций, используя правила предельного перехода

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}$;

Решение. При $x\to+\infty$ числитель и знаменатель неограниченно увеличиваются, следовательно, получаем неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для вычисления предела преобразуем данную дробь, разделив числитель и знаменатель на старшую степень переменной, т.е. на $x^4\neq 0$ при $x\to+\infty$.

Пользуясь свойствами пределов, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^4}}{4-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-1+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(-1)+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{-1+0+0}{4-0+0}=-\frac{1}{4}.$$

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$

Решение

При $x=-2$ числитель и знаменатель обращаются в 0, следовательно, получаем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Преобразуем данную дробь, разложив числитель и знаменатель на множители по формуле разложения квадратного трехчлена:

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}=\lim_{x\to-2}\frac{3(x+2)\left(x-\frac{7}{3}\right)}{(x+6)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{3x-7}{x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to-2}(3x-7)}{\lim\limits_{x\to-2}(x+6)}=$$

$$=\frac{3(-2)-7}{-2+6}=-\frac{13}{4}.$$

в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$

Решение

При $x=5$ числитель и знаменатель обращаются в 0, следовательно, получаем неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Преобразуем дробь. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на произведение $\left(\sqrt{x+4}+3\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)\neq0$ при $x\to5$ (сопряженные выражения):

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{x+4}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\left(\left(\sqrt{x+4}\right)^2-3^2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\left(\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2^2\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x+4}+3}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to5}(\sqrt{x-1}+2)}{\lim\limits_{x\to5}(\sqrt{x+4}+3)}=\frac{\sqrt{5-1}+2}{\sqrt{5+4}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Задание для самостоятельного выполнения

Задание 3. Вычислите пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n^3+2n-1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{n+2}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-n+2}{32+2n+n^2-6n^3}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n+1})$

Задание 4. Вычислите пределы функций, используя правила предельного перехода

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-3x+1}$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение числовой последовательности. Примеры
2. Способы задания числовой последовательности.
3. Какая последовательность называется возрастающей (убывающей)?
4. Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины.
5. Правила раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Подведение итогов работы: Анализ выполненных заданий

Критерии оценки:

«5» - верное выполнение заданий 3 (а, б, в, г), 4 (а, б, в);

«4»-верное выполнение любых 5-ти примеров части самостоятельно ;

«3» - выполнение заданий 1(а, б, в, г), 2 (а, б, в)

Практическое занятие 23 Производная

Цель: дать представление о производной

Теоретическая часть

Пусть величина u зависит от аргумента x как u=f(x). Если f(x) была зафиксирована в двух точках значениях аргумента: x_2, x_1, то мы получаем величины $u_1=f(x_1)$, и $u_2=f(x_2)$. Разность двух значений аргумента x_2, x_1 назовём приращением аргумента и обозначим как $\Delta x=x_2-x_1$ (следовательно, $x_2=x_1+\Delta x$). Если аргумент изменился на $\Delta x=x_2-x_1$, то функция изменилась (приросла) как разность двух значений функции $u_1=f(x_1)$, $u_2=f(x_2)$ на величину приращения функции Δf. Записывается обычно так: $\Delta f=u_1-u_2=f(x_2)-f(x_1)$. Или с учётом что $x_2=x_1+\Delta x$, можно записать, что изменение функции равно $\Delta f= f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$. И это изменение произошло, естественно, на области возможных значений функции x_2 и x_1. Считается, что если величины x_2 и x_1 бесконечно близки по величине друг к другу, тогда $\Delta x=x_2-x_1$, - бесконечно мало.

Производной функции f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δf в этой точке к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю (бесконечно мало). Записывается так:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной называется ***дифференцированием***. Вводится определение дифференцируемой функции: функция f, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется дифференцируемой на данном промежутке.

Физический смысл производной x`(t) от непрерывной функции x(t) в точке t_0 – есть мгновенная скорость изменения величины функции, при условии, что изменение аргумента Δt стремится к нулю.

Если функция f имеет производную в точке x^0, а функция g имеет производную в точке $y^0 = f(x^0)$, то сложная функция h (x) = g (f (x)) также имеет производную в точке x^0, причем $h'(x^0) = g'(f(x^0))\, f'(x^0)$

Основные правила дифференцирования:

Обозначим f(x) = u, g(x) = v- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u\cdot v)' = u\cdot v' + u'\cdot v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Производные основных элементарных функций:

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

17) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Пример 1. Найти производную функции $y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию «производная функции».
2. Перечислите основные правила дифференцирования.

Практическая часть

Подготовить сообщение о производной, опираясь на теоретическую часть.

Практическое занятие 24.1
Нахождение производных сложных функций вида f(ax+d)

Цель: закрепить навыки нахождения производной функции.

Теоретическая часть

Производной функции f(x) в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

Если функция f имеет производную в точке x_0, а функция g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция h (x) = g (f (x)) также имеет производную в точке x_0, причем $h'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$

Основные правила дифференцирования:

Обозначим f(x) = u, g(x) = v- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

9) $(\sin x)' = \cos x$ 10) $(\cos x)' = -\sin x$ 11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ 16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$ 17) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Пример 1. Найти производную функции $y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию «производная функции».
2. Перечислите основные правила дифференцирования.
3. Продолжите $(\cos x)' = ?$
4. Продолжите $(\sin x)' = ?$
5. Продолжите $(x^n)' = ?$

Практическая часть

Найдите производную функции:

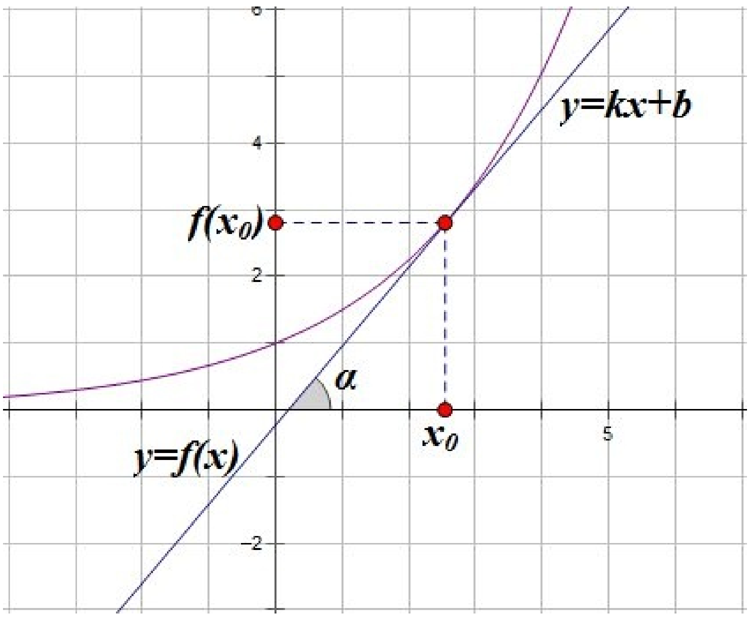
1. $f(x) = x^2 + 3x^3$	13. $f(x) = x^3 \sin x$
2. $f(x) = x^3(4x + 2x - x^2)$	14. $f(x) = x^4 + tg(-2x)$
3. $f(x) = \sqrt{x}(2x^2 - 2x)$	15. $f(x) = \frac{1}{2}tg^2 x + \ln\cos x - 3^x$
4. $f(x) = (2x - 2)(1 - x^3)$	16. $f(x) = arcctg\frac{4x}{1+\sqrt{1-x^2}}$
5. $f(x) = \frac{1+2x}{3-5x}$	17. $f(x) = x^2\cdot\sqrt[3]{1-x^2} + \arcsin(1+x^3)^{12}$
6. $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$	18. $f(x) = x^2\cdot(1+x)$

7. $f(x) = x^8 + \frac{x}{3} - 4\sqrt[3]{x^5}$	19. $y = tg\,(x+\pi)$
8. $f(x) = (x-8)^8$	20. $y = 2\,tg\,x - 3$
9. $f(x) = (x+5)^4 + \sin^2 x$	21. $y = tgx$
10. $f(x) = \frac{1}{(5x+1)^3} + \cos 2x \sin x$	22. $y = ctg\,3x$
11. $f(x) = \sin 5x \sin 3x + 2x$	23. $y = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$
12. $f(x) = \sin^3 \frac{x}{2} - 3$	24. $y = -\sin(2x+\pi)$

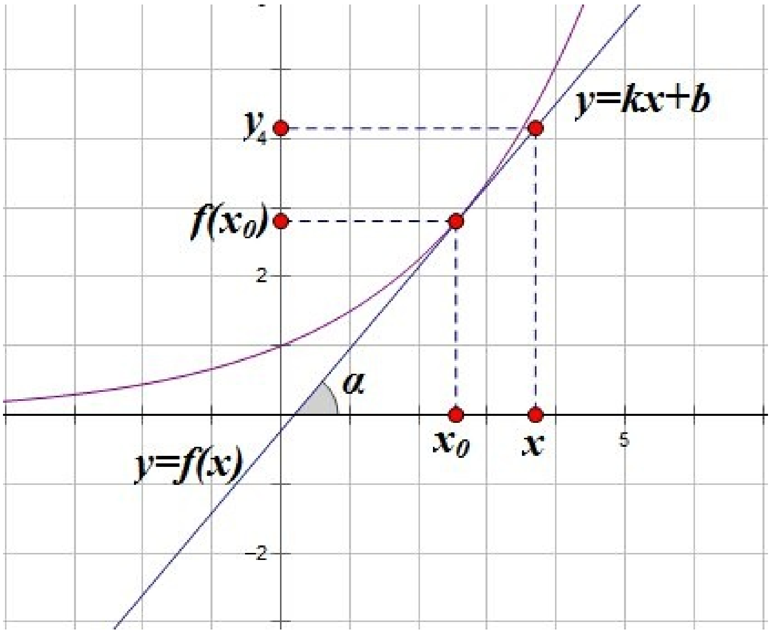
Практическое занятие 24.2
Уравнение касательной в общем виде. Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций. Исследование функции с помощью производной. Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции.

Вспомним ***геометрический смысл производной:*** если к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 проведена касательная, то коэффициент наклона касательной, равный тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси *OX*, равен производной функции в точке x_0

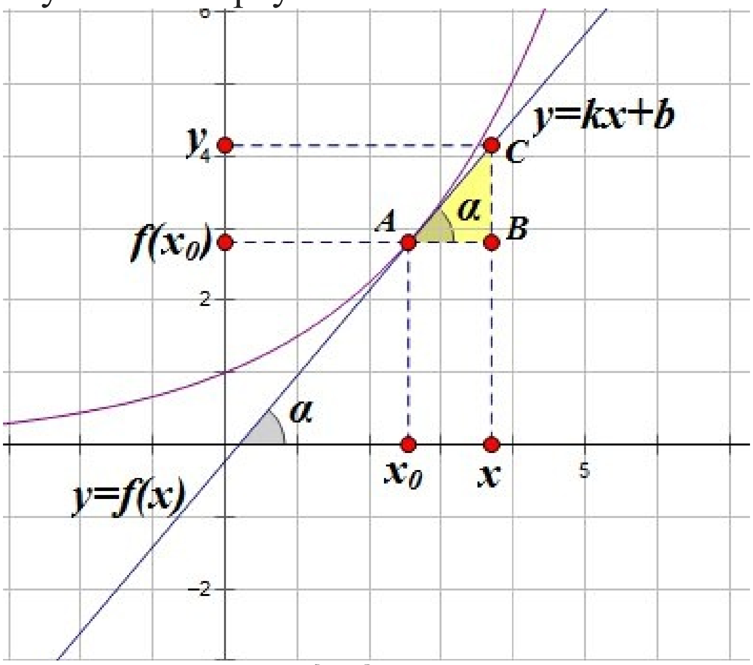
$$k = tg\alpha = f'(x_0)$$



Возьмем на касательной произвольную точку с координатами *(x;y):*



И рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC*:



В этом треугольнике

$$tg\,\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{y - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = f'\left(x_0\right)$$

Отсюда $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ или $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Это и есть уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Чтобы написать уравнение касательной, нам достаточно знать уравнение функции и точку, в которой проведена касательная. Тогда мы сможем найти

$f(x_0)$ и .$= f'(x_0)$

Есть три основных типа задач на составление уравнения касательной.

1. Дана точка касания x_0
2. Дан коэффициент наклона касательной, то есть значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

3. Даны координаты точки, через которую проведена касательная, но которая не является точкой касания.

Рассмотрим каждый тип задач.

1. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 – 2x^2 + 3$ в точке $x_0=1$.

а) Найдем значение функции в точке $x_0= 1$

$f(1) = 1^3 – 2*1^2 + 3= 2$

б) Найдем значение производной в точке $x_0=1$. Сначала найдем производную функции $y = f(x)$

$$f'(x) = 3x^2 – 4x \qquad f'(1) = 3* 1^2 – 4* 1= -1$$

Подставим найденные значения в уравнение касательной: $y = 2 + (-1)(x - 1)$

Раскроем скобки в правой части уравнения. Получим: $y = - x + 3$

Ответ: $y = - x + 3$.

2. Найти абсциссы точек, в которых касательные к графику функции $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3+\frac{15}{2}x^2$ параллельны оси абсцисс.

Если касательная параллельна оси абсцисс, то угол между касательной и положительным направлением оси OX равен нулю, следовательно тангенс угла наклона касательной равен нулю. Значит, значение производной функции $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3+\frac{15}{2}x^2$ в точках касания равно нулю.

а) Найдем производную функции $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3+\frac{15}{2}x^2$.

$$y' = x^3 – 8x^2 + 15x$$

б) Приравняем производную к нулю и найдем значения x, в которых касательная параллельна оси OX: $x^3 – 8x^2 + 15x = 0$ $\quad x(x^2 - 8x + 15) = 0$

Приравняем каждый множитель к нулю, получим: $x_1 = 0;$ $\quad x_2 = 3;$ $\quad x_3 = 5$

Ответ: 0;3;5

3. Написать уравнения касательных к графику функции $y=\frac{3x-4}{2x-3}$, параллельных прямой $y = - x + 3$

Касательная параллельна прямой $y = - x + 3$. Коэффициент наклона этой прямой равен -1. Так как касательная параллельна этой прямой, следовательно, коэффициент наклона касательной тоже равен -1. То есть мы знаем ***коэффициент наклона касательной***, а, тем самым, ***значение производной в точке касания***. Это второй тип задач на нахождение уравнения касательной.

Итак, у нас дана функция $y=\frac{3x-4}{2x-3}$ и значение производной в точке касания.

а) Найдем точки, в которых производная функции $y=\frac{3x-4}{2x-3}$ равна -1.
Сначала найдем уравнение производной.

Нам нужно найти ***производную дроби***. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

$$y'=\frac{(3x-4)'(2x-3)-(2x-3)'(3x-4)}{(2x-3)^2}=\frac{3(2x-3)-2(3x-4)}{(2x-3)^2}=\frac{-1}{(2x-3)^2}$$

Приравняем производную к числу -1.

$$\frac{-1}{(2x-3)^2}=-1$$

$(2x - 3)^2 = 1$

$2x - 3 = 1$ или $2x - 3 = -1$

$x_0 = 2$ или $x_0 = 1$

б) Найдем уравнение касательной к графику функции $y=\frac{3x-4}{2x-3}$ в точке $x_0 = 2$.
Найдем значение функции в точке $x_0 = 2$.

$$y(2)=\frac{3\times2-4}{2\times2-3}=2$$

$y'(2) = -1$ (по условию)

Подставим эти значения в уравнение касательной: $y = 2 + (-1)(x - 2) = -x + 4$.

б) Найдем уравнение касательной к графику функции $y=\frac{3x-4}{2x-3}$ в точке $x_0 = 1$.
Найдем значение функции в точке $x_0 = 1$.

$$y(1)=\frac{3\times1-4}{2\times1-3}=1$$

$y' = -1$ (по условию).

Подставим эти значения в уравнение касательной: $y = 1 + (-1)(x - 1) = -x + 2$

Ответ: $y = -x + 4;$
$y = -x + 2$

4. Написать уравнение касательной к кривой $y=\sqrt{8-x^2}$**,** проходящей через точку *A* (3,1)

Сначала проверим, не является ли точка *A* (3,1) точкой касания. Если точка является точкой касания, то она принадлежит графику функции, и её координаты должны удовлетворять уравнению функции. Подставим координаты точки *A* (3,1) в уравнение функции. $1\neq\sqrt{8-3^2}$. Мы получили под корнем отрицательное число, равенство не верно, и точка *A* (3,1) не принадлежит графику функции и ***не является точкой касания.***

Это последний тип задач на нахождение уравнения касательной. Первым делом нам нужно найти ***абсциссу точки касания***.

Найдем значение x_0.
Пусть x_0 - точка касания. Точка A (3,1) принадлежит касательной к графику функции $y=\sqrt{8-x^2}$. Если мы подставим координаты этой точки в уравнение касательной, то получим верное равенство: $1 = f(x_0) + f'(x_0)(3 - x_0)$.

Значение функции $y=\sqrt{8-x^2}$ в точке x_0 равно $f(x_0)=\sqrt{8-x_0^2}$.

Найдем значение производной функции $y=\sqrt{8-x^2}$ в точке x_0.

Сначала найдем производную функции $y=\sqrt{8-x^2}$. Это ***сложная функция***.

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{8-x^2}}\times(8-x^2)'=\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}$. Производная в точке x_0 равна

$$f'(x_0)=\frac{-2x_0}{2\sqrt{8-x_0^2}}.$$

Подставим выражения для $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в уравнение касательной. Получим уравнение относительно x_0:

$$1=\sqrt{8-x_0^2}+\frac{-2x_0}{2\sqrt{8-x_0^2}}(3-x_0)$$

Решим это уравнение.
Сократим числитель и знаменатель дроби на 2:

$$1=\sqrt{8-x_0^2}+\frac{-x_0}{\sqrt{8-x_0^2}}(3-x_0)$$

Приведем правую часть уравнения к общему знаменателю. Получим:

$$1=\frac{8-x_0^2-x_0(3-x_0)}{\sqrt{8-x_0^2}}$$

Упростим числитель дроби и умножим обе части на $\sqrt{8-x_0^2}$ - это выражение строго больше нуля. Получим уравнение

$$8-3x_0=\sqrt{8-x_0^{\;2}}$$

Это ***иррациональное уравнение***.

Решим его. Для этого возведем обе части в квадрат и перейдем к системе.

$$\begin{cases} 64-48x_0+9x_0^{\;2}=8-x_0^{\;2} \\ 8-3x_0\geqslant 0 \end{cases}$$

Решим первое уравнение.

$$10x_0^{\;2}-48x_0+56=0 \qquad\qquad 5x_0^{\;2}-24x_0+28=0$$

Решим квадратное уравнение, получим

$$x_0=2 \text{ или } x_0=2{,}8$$

Второй корень не удовлетворяет условию $8-3x_0\geqslant 0$, следовательно, у нас только одна точка касания и её абсцисса равна 2.

Напишем уравнение касательной к кривой $y=\sqrt{8-x^2}$ в точке $x_0=2$. Для этого подставим значение $x_0=2$ в уравнение $y=\sqrt{8-x_0^{\;2}}+\dfrac{-2x_0}{2\sqrt{8-x_0^{\;2}}}\left(x-x_0\right)$

Получим:

$$y=\sqrt{8-2^2}-\frac{2\times 2}{2\sqrt{8-(2)^2}}\left(x-2\right)$$

$$y=2-\left(x-2\right)=-x+4$$

Ответ: $y=-x+4$

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. В этом случае, как известно, она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке. Во многих прикладных вопросах важно найти те точки отрезка $[a; b]$, которым отвечают наибольшее и наименьшее значения функции.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка, и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;
2) либо наибольшее (наименьшее) значение достигается на концах отрезка $[a; b]$.

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции $y = f(x)$, достаточно:

1. Найти все критические точки, принадлежащие $[a; b]$, и вычислить значения функции в этих точках.
2. Вычислить значения функции на концах отрезка $[a; b]$, то есть найти $f(a)$ и $f(b)$.
3. Сравнить полученные результаты: наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке $[a; b]$; аналогично, наи-

меньшее из найденных значений является наименьшим значение функции на этом отрезке.

Замечание 1. При нахождении критических точек можно использовать соображения геометрического характера, изобразив схематически график функции.

Замечание 2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции можно упростить, если воспользоваться следующими свойствами непрерывных функций:

1. если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ непрерывна и возрастает, то $m = f(a)$ и $M = f(b)$;
2. если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ непрерывна и убывает, то $m = f(b)$ и $M = f(a)$;
3. если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на этом отрезке только одну точку максимума x_0 (и ни одной точки минимума), то наибольшее значение на данном отрезке есть $M = f(x_0)$;
4. если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на этом отрезке только одну точку минимума x_0 (и ни одной точки максимума), то наименьшее значение на данном отрезке есть $m = f(x_0)$.

Алгоритм решения задач на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции:

Если в задаче требуется найти максимальное или минимальное значение функции $f(x)$ на отрезке [a; b], выполняем следующие действия:

1. Найти производную функции: $f'(x)$.
2. Решить уравнение $f''(x) = 0$. Если корней нет, пропускаем третий шаг и переходим сразу к четвертому.
3. Из полученного набора корней вычеркнуть все, что лежит за пределами отрезка [a; b]. Оставшиеся числа обозначим $x_1, x_2, ..., x_n$ — их, как правило, будет немного.
4. Подставим концы отрезка [a; b] и точки $x_1, x_2, ..., x_n$ в исходную функцию. Получим набор чисел $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$, из которого выбираем наибольше или наименьшее значение — это и будет ответ.

Небольшое пояснение по поводу вычеркивания корней, когда они совпадают с концами отрезка. Их тоже можно вычеркнуть, поскольку на четвертом шаге концы отрезка все равно подставляются в функцию — даже если уравнение $f'(x) = 0$ не имело решений.

Также следует внимательно читать условие задачи. Когда требуется найти значение функции (максимальное или минимальное), концы отрезка и точки $x_1, x_2, ..., x_n$ подставляются именно в функцию, а не в ее производную.

Задача 1. Найти наибольшее значение функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ на отрезке [−5; 0].

Решение. Для начала найдем производную: $y' = (x^3 + 3x^2 - 9x - 7)' = 3x^2 + 6x - 9$.

Затем решаем уравнение: $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow x = -3; x = 1$.

Вычеркиваем корень $x = 1$, потому что он не принадлежит отрезку [−5; 0].

Осталось вычислить значение функции на концах отрезка и в точке $x = -3$:
$y(-5) = (-5)^3 + 4\cdot(-5)^2 - 9\cdot(-5) - 7 = -12;$
$y(-3) = (-3)^3 + 4\cdot(-3)^2 - 9\cdot(-3) - 7 = 20;$
$y(0) = 0^3 + 4\cdot 0^2 - 9\cdot 0 - 7 = -7.$
Очевидно, наибольшее значение равно 20 — оно достигается в точке $x = -3$.

Ответ: 20

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ на отрезке.

Решение. 1. Находим критические точки, принадлежащие:
$f(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$, $6(x^2 - 1) = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.
Вычислим значения функции в этих точках:
$f(-1) = 2 * (-1)^3 - 6 * (-1) + 5 = 9;$ $f(1) = 2 * 1^3 - 6 * 1 + 5 = 1.$

2. Вычислим значения функции на концах отрезка.
3. Таким образом, наибольшее значение данной функции на рассматриваемом отрезке есть $f(-1) = 9$, а наименьшее $f(1) = 1$

Ответ: $f(-1) = 9$, $f(1) = 1$.

Дробно – рациональные функции

Задача 3. Найдите наименьшее значение функции на отрезке [1; 9].
Решение: Найдём производную данной функции. Приведём полученное выражение к общему знаменателю и разложим числитель на множители.
Отрезку [1; 9] принадлежит точка $x=6$, в которой производная меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, точка $x=6$ является точкой минимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наименьшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдём наименьшее значение:

Ответ: 12.

Задача 4. Найдите наименьшее значение функции на отрезке [1;14].
Решение. Заметим, что функция не определена в точке 0. Берем производную дроби:

$$y' = \frac{(x^2+4)'x - (x^2+4)x'}{x^2}$$

$$y' = \frac{2x * x - (x^2+4)}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$$

Приравниваем производную к нулю и отыскиваем корни:
$\frac{x^2 - 4}{x^2} = 0$ $x^2 = 4$ $x = \pm 2$

Один из корней нас не интересует, так как промежутку не принадлежит, а во второй точке производная меняет знак с отрицательного на положительный. То есть функция имеет минимум в данной точке. Определим ее минимальное значение:

$x = 2$

$$y = \frac{2^2 + 4}{2} = 4$$

Ответ: 4.

Целые рациональные функции

Задача 5.

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке [-2;0]

Решение. Найдём производную заданной функции: $(x^3 - 3x + 4)' = 3x^2 - 3$

Найдем нули производной: $y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$$

Указанному в условии интервалу принадлежит точка $x = -1$.

Вычисляем значения функции в точках –2, –1 и 0:

$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 4 = 2$

$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$

$y(-2) = 0^3 - 3* 0 + 4 = 4$

Наибольшее значение функции равно 6.

Ответ: 6

Задача 6. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2$ на отрезке [–3;3].

Решение. Найдём производную заданной функции: $(x^3 - 6x^2)' = 3x^2 - 12x$

Найдем нули производной:

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x(x - 4) = 0$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$$

Указанному в условии интервалу принадлежит точка $x = 0$.

Вычисляем значения функции в точках –3, 0 и 3:

$y(-3) = (-3)^3 - 6(-3)^2 = -81$

$y(0) = 0^3 - 6 * 0^2 = 0$

$y(3) = 3^3 - 6 * 3^2 = -27$

Наименьшее значение функции равно 0. Ответ: 0

Задача *7*. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ на отрезке [1;4].

Решение. Найдём производную заданной функции:

$(x^3 - 2x^2 + x + 3)' = 3x^2 - 4x + 1$

Найдем нули производной, решаем квадратное уравнение: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

Получим корни: $x_1 = 1 \quad x_1 = 1/3$.

Указанному в условии интервалу принадлежит только $x = 1$.

Найдём значения функции в точках 1 и 4:

$y(1) = 1^3 - 2 * 1^2 + 1 + 3 = 3$

$y(4) = 4^3 - 2 * 4^2 + 1 + 3 = 36$

Получили, что наименьшее значение функции равно 3.

Ответ: 3

Задача 8. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$ на отрезке $[-4; -1]$.

Решение. Найдём производную заданной функции:

$(x^3 + 2x^2 + x + 3)' = 3x^2 + 4x + 1$

Найдем нули производной, решаем квадратное уравнение: $3x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -\frac{1}{3}$$

Получим корни:

Указанному в условии интервалу принадлежит корень $x = -1$.

Находим значения функции в точках -4, -1, $-1/3$ и 1:

$y(-4) = (-4)^3 + 2*(-4)^2 + 1 + 3 = -28$

$y(-1) = (-1)^3 + 2*(-1)^2 - 1 + 3 = 3$

Получили, что наименьшее значение функции равно - 28.

Ответ: - 28.

Рассмотрим способ определения наибольшего и наименьшего значения функций без производной. Этот подход можно использовать, если с определением производной у вас большие проблемы. Принцип простой – в функцию подставляем все целые значения из интервала (дело в том, что во всех подобных прототипах ответом является целое число).

Задача 9. Найдите наименьшее значение функции $y = 7 + 12x - x^3$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение. Подставляем точки от -2 до 2:

$y(-2)=7+12(-2)-(-2)^3 = -9$

$y(-1)=7+12(-1)-(-1)^3 = -6$

$y(0)=7+12\cdot 0-0^3 = 7$

$y(1)=7+12\cdot 1-1^3 = 18$

$y(2)=7+12\cdot 2-2^3 = 23$

Наименьшее значение равно -9.

Ответ: -9

Практическое занятие 25

Интеграл и первообразная. Теорема Ньютона—Лейбница. Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия представлены в таблицах ниже.

Определение: **функция F называется первообразной для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка**

$$F'(x) = f(x)$$

Таблица первообразных.

$f(x)$	$F(x)$
k	$k*x$
x^n	$x^{n+1}/n+1$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1/\cos^2 x$	$\mathrm{tg}x$
$1/\sin^2 x$	$-\mathrm{ctg}x$
$\sqrt{x}$	$2/3\, x\sqrt{x}$

Теорема (общий вид первообразных)

Любая первообразная для функции $f(x)$ может быть записана в виде

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – одна из первообразных; C – постоянная.

Правила нахождения первообразных

Правило 1

Если F (x) – первообразная для f(x), G (x) – первообразная для g(x), то
F (x) + G (x) – первообразная для f(x) + g(x).

Правило 2

Если F (x) – первообразная для f(x), k – постоянная, то
k∗ F (x) – первообразная для k∗f(x)

Правило 3

Если F (x) – первообразная для f(x), $k \neq 0$, b – постоянная, то
1/k F (kx + b) – первообразная для f(kx + b).

Примеры:

Найти общий вид первообразных.

Пример 1:

$f(x) = x^5 + \sin x + 10$

Решение

$F(x) = x^6/6 - \cos x + 10x$

Ответ: $F(x) = x^6/6 - \cos x + 10x$

Пример 2:

$f(x) = (4x - 1)^7$

Решение

$F(x) = ¼\ (4x - 8)^8/8 = (4x - 1)^8/32$

Ответ: $F(x) = (4x - 1)^8/32$

Пример 3:

$f\ (x) = x^2 + 2x + 4 + \sin x$

Решение

$Ф(x) = x^3\ /3 + x^2 + 4x - \cos x + C$

Ответ: $Ф(x) = x^3\ /3 + x^2 + 4x - \cos x + C$

Пример 4:

Найти первообразную, график которой проходит через т. M(0;1).

$f(x) = x^2$

Решение

$\Phi(x) = x^3/3 + C$

$\Phi(0) = 1$

$\Phi(0) = 0^3/3 + C = 1 \Longrightarrow C = 1$

$\Phi(x) = x^3 + 1$

Ответ: $\Phi(x) = x^3 + 1$

Задание для практического занятия

I вариант.	II вариант.
1. Является ли функция F первообразной для функции f на указанном промежутке. Ответ обосновать.	
а) $F(x)=x^{-8}$, $f(x)=-8x^{-7}, x\in(0;+\infty)$	а) $F(x)=x^{-6}$, $f(x)=-6x^{-7}$, $x\in(0;+\infty)$
б) $F(x)=1/5\times x^5$, $f(x)=x^4$, $x\in(-\infty;+\infty)$	б) $F(x)=1/8\times x^8$, $f(x)=x^7$, $x\in(-\infty;+\infty)$
в) $F(x)=-7+\cos x$, $f(x)=-\sin x$, $x\in(-\infty;+\infty)$	в) $F(x)=\sin x+5$, $f(x)=-\cos x$, $x\in R$
г) $F(x)=1/4\times\sin 4x$, $f(x)=-\cos 4x$, $x\in R$	г) $F(x)=1/3\times\cos 3x$, $f(x)=-\sin 3x$, $x\in R$
д) $F(x)=\sqrt{64-x^6}$, $f(x)=-3x^5/\sqrt{64-x^6}$, $x\in R$	д) $F(x)=\sqrt{81-x^4}$, $f(x)=-2x^3/\sqrt{81-x^4}$, $x\in R$
2. Найти общий вид первообразных для функции f.	
а) $f(x)=2-1/(x^2)+x^5+x^9/9$	а) $f(x)=x^9+3/x^6-x^4+7$
б) $f(x)=(3-8x)4$	б) $f(x)=(6-3x)^9$
в) $f(x)=1/\sqrt{1/2\times x-3}+4x+1/\sin^2(5x-1)$	в) $f(x)=1/\sqrt{1/5\times x+2}-8x-1/\cos^2(4x+3)$
г) $f(x)=4/(2-7x)^3$	г) $f(x)=3/(7-2x)^4$
д) $f(x)=14\cos(x/6+1)+\sqrt{8-5x}$	д) $f(x)=10\sin(1-x/6)+\sqrt{7x+1}$
3. Для функции f найти первообразную, график которой проходит через точку M.	
а) $f(x)=6x2$, $M(1;0)$	а) $f(x)=7x^6$, $M(0;1)$
б) $f(x)=3\cos x$, $M(\pi/2;1)$	б) $f(x)=4\sin x$, $M(\pi;2)$
в) $f(x)=\sin(x-\pi/4)$, $M(\pi/4;0)$	в) $f(x)=\cos(\pi/6-x)$, $M(\pi/6;0)$
г) $f(x)=1/\sqrt{7x-1}$, $M(1/7;3)$	г) $f(x)=1/\sqrt{1-9x}$, $M(1/9;5)$
д) $f(x)=(5-4x)^3$, $M(5/4;1)$	д) $f(x)=(4-5x)^{10}$, $M(4/5;1)$
4. Вычислить:	
$(17{,}31^2-12{,}69^2)-(29{,}81^2-0{,}19^2)$	$(7{,}84^2-12{,}16^2)+(25{,}66^2-5{,}66^2)$

Тема: «Криволинейная трапеция»

Задание для практического занятия

I вариант

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $y= 5x+1, y=0, x=0, x=2$
2. $y=x^2, y=0, x=4$
3. $y=y=x^3, y=0, x=2$
4. $y=1/x^2, y=0, x=1, x=3$
5. $y=(x+1)^2, y=0, x=0$
6. $y=\sin x, y=0, x=\pi/4, x=\pi/2$
7. $y=\cos 3x, y=0, x=-\pi/4, x=\pi/12$
8. $y=4x-1$, y=o, $x=2, x=1$
9. $y=1/x^2, y=0\ x=1/2, x=1$
10. $y=x^4, y=0, x=0, x=1$
11. $y=\ x, y=0, x=1, x=4$
12. $y=\ x\ 2, y=0, x=6, x=11$
13. $y=\sin(x-\pi/2), y=0, x=\pi$

Сравнить

14. (1993/1994)-1и 1-(1994/1993)

II вариант

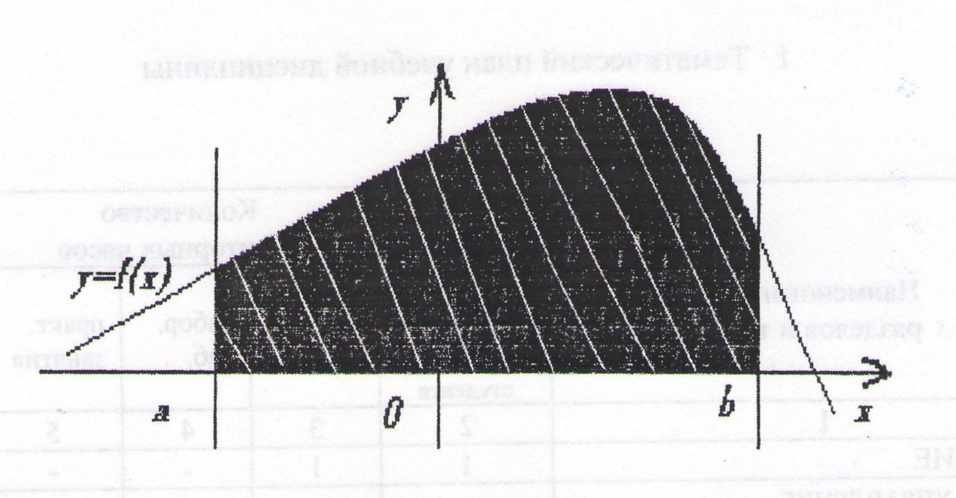
1. $y=3x+2, y=0, x=0, x=1$
2. $y=x^2, y=0, x=3$
3. $y=x^3, y=0, x=1$
4. $y=1/x^2, y=0, x=2, x=4$
5. $y=(x-1)^2, y=0, x=0$
6. $y=2\sin x, y=0, x=\pi/2$
7. $y=\cos x, y=0, x=-\pi/4, x=\pi/4$
8. $y=2x+1, y=0, x=0, x=1$
9. $y=1/x^2, y=0, x=1, x=2$
10. $y=x^5, y=0, x=0, x=1$
11. $y=\ x, y=0, x=4, x=9$
12. $y=\ x-3, y=0, x=4, x=7$
13. $y=\cos(x-\pi/2), y=0, x=\pi/2$

Сравнить

14. 1995/1994 и 2-(1994/1995)

Тема: «Интеграл»

Краткие теоретические и учебно-методические материалы



$S=F(b) - F(a)$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

a,b пределы интегрирования
f(x) подынтегральная функция

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Формула Ньютона - Лейбница.

Примеры

1.

$$\int_0^{11} X^2 DX = X^3/3\Big|_0^{11} = 1^3/3 - 0^3/3 = 1/3$$

ОТВЕТ. 1/3

1.

$$\int_1^{10} (DX)/X^2 = -1/X\Big|_1^{10} = -1/10 + 1 = 0.9$$

ОТВЕТ. 0,9

2.

3.

$$\int_0^{\Pi} COSX\,DX = SINX\Big|_0^{\Pi} = SIN\Pi - SIN0 = 0 - 0 = 0$$

ОТВЕТ. 0

3.

4.

$$\int_1^{25} 1/\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^{25} = 2*\sqrt{25}-2*\sqrt{1}=10-2=8$$

ОТВЕТ.8

4.

Задание для практического занятия

I вариант

1. $\int_{16}^{25} dx/\sqrt{x}$ 2. $\int_0^1 (x^6+3x^2+5)dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x/2dx$ 4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dx/\sin^2 x$

5. $\int_0^1 dx/(3x-1)^4$ 6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sin 4xdx$

7. $\int_{1/\sqrt[3]{5}}^{1/\sqrt[3]{6}} x^2dx$ 8. $\int_{-7}^0 dx/\sqrt{x/7+1}$

9. $\int_1^2 (5-2x)^3dx$ 10. $\int_1^2 \sqrt{5x-1}dx$

11. $\int_0^{3\pi} (3+\sin x/3)dx$ 12. $\int_0^{\pi/8} dx/\cos^2 8x$

13. $\int_0^1 (\sqrt{x}+x/\sqrt{x})^2dx$

II вариант

1. $\int_0^{49} dx/x$ 2. $\int_1^2 (x^3+4x^2-6)dx$

3. $\int_0^{\pi} \sin x/2dx$ 4. $\int_0^{\pi/4} dx/\cos^2 x$

5. $\int_0^{1/5} dx/(5x+1)^3$ 6. $\int_0^{\pi/30} 4\cos 5xdx$

7. $\int_{\sqrt[4]{5}}^{\sqrt[4]{7}} x^3dx$ 8. $\int_0^6 dx/\sqrt{1-x/6}$

9. $\int^1 (3x-1)^5dx$ 10. $\int^1 \sqrt{1+8x}dx$

11. $\int_0^{2\pi} (2+\sin x/2)dx$ 12. $\int_{\pi/36}^{\pi/18} dx/\sin^2 9x$

13. $\int_0^1 (\sqrt{x}+1/\sqrt{x})dx$

14. $\int_0^{\pi/2}(\sin x/2+\cos x/2)^2dx$ 14. $\int_0^{\pi}(\sin x/8+\cos x/8)^2dx$

15. $\int_{-5\pi}^{-5\pi/2}(1-\cos x/5)dx$ 15. $\int_{-7\pi}^{-7\pi/2}(1-\sin x/7)dx$

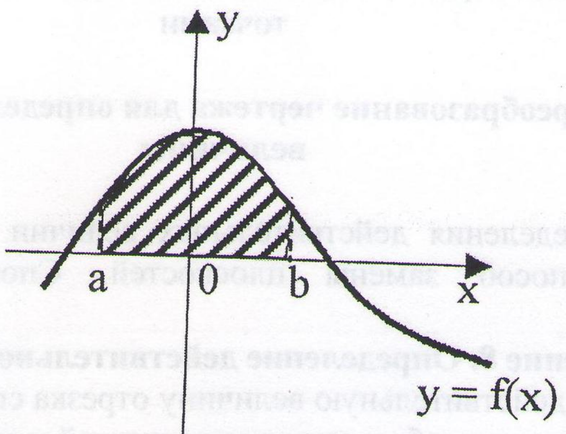
Расположить в порядке убывания числа

16. $(4/3)^2$; $(4/3)^{-3}$; $(4/3)^0$; $(4/3)^{-2}$ 16. $(2/3)^{-1}$; $(2/3)^2$; $(2/3)^3$; $(2/3)^{-2}$

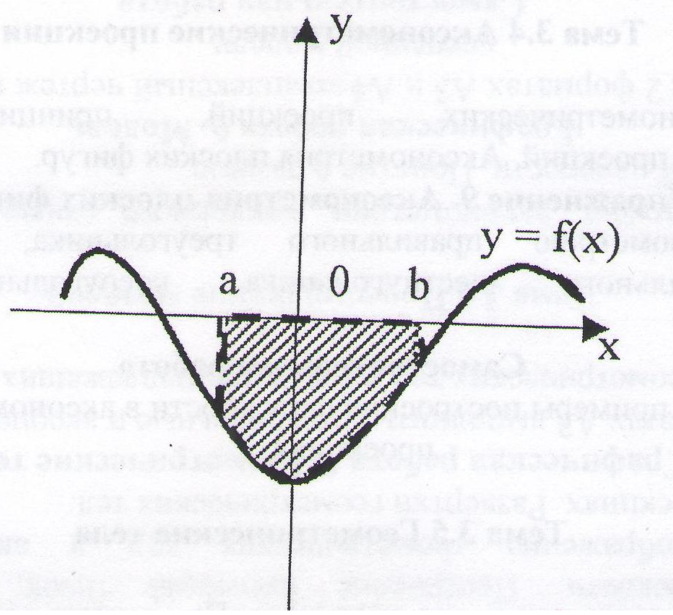
Тема: «Вычисление площадей фигур с помощью интеграла»

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме

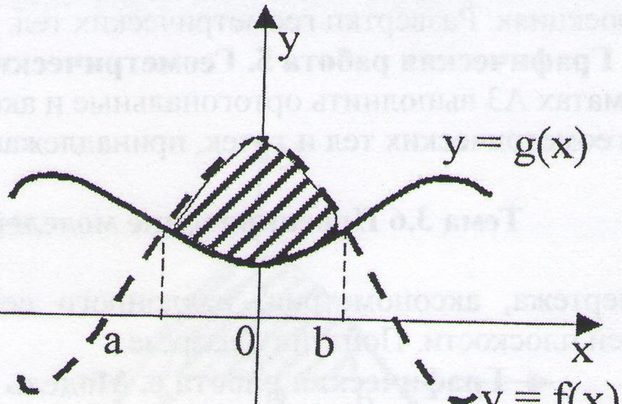
1. $S = F(b) - F(a)$



2. $S = F(a) - F(b)$



$S = S_1 - S_2$

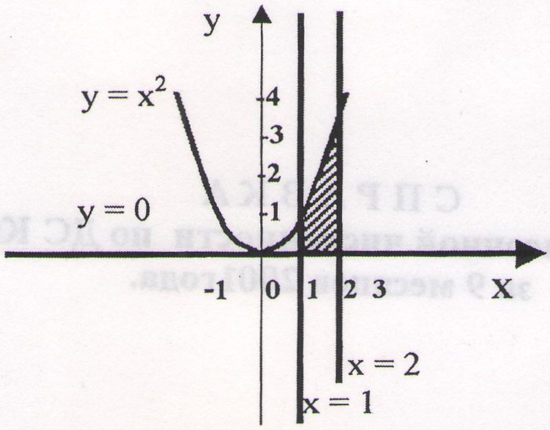


Примеры: **Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями**

1. $y = x^2,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$

Решение:

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



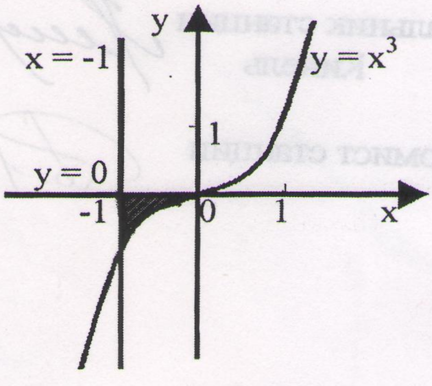
$S = \int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\,\frac{1}{3}$ (кв.ед.)

Ответ: $2\frac{1}{3}$ **кв. ед .**

2. $y = x^3,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0$

Решение:

x	y
-1	-1
0	0
1	1



$S = -\int_{-1}^{0} x^3dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{0^4}{4} + \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$ (кв. ед.)

Ответ: $\frac{1}{4}$ **кв. ед.**

3. $y = \sqrt{x}$, $y = x$

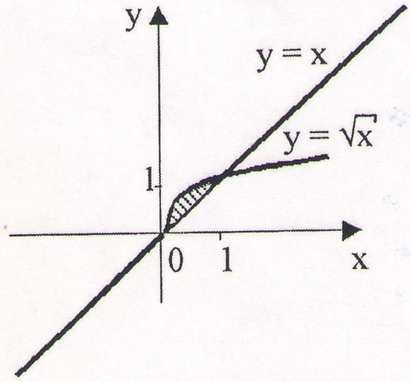
Решение:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\cdot 1\sqrt{1} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot 0\sqrt{0} - \frac{0^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6} \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$ **кв. ед.**



x	y
0	0
1	1
4	2

x	y
0	0
1	1

Задание для практического занятия

I вариант

1. Вычислитьплощадь фигуры, ограниченной линиями

а) $y=2x+1$, $x=0$, $y=0$, $x=1$

б) $y=x^2+2$, $y=3$

в) $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$

г) $y=-x^5$, $y=0$, $x=1$

д) $y=1/\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$

е) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$

ж) $y=\sin x$, $y=0$, $x=3\pi/2$, $x=\pi$

з) $y=\cos x$, $y=1/2$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=-\frac{\pi}{3}$

и) $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=2$

к) $y=\sqrt{3x+1}$, $y=x^2+1$

II вариант

а) $y=3x-1$, $x=1$, $x=2$, $y=0$

б) $y=x^2+1$, $y=2$

в) $y=x^5$, $y=0$, $x=-1$

г) $y==x^4$, $y=\sqrt{x}$

д) $y=1/\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1/4$, $x=1$

е) $y=\sin x$, $y=0$, $x=\pi/2$, $x=0$

ж) $y=\cos x$, $y=o$, $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$

з) $y=\sin x$, $y=-1/2$, $x=-\frac{\pi}{6}$, $x=-\frac{5\pi}{6}$

и) $y=(x+1)^2$, $x=0$, $y=0$

к) $y=\sqrt{8x+1}$, $y=2x^3+1$

2. Решить уравнение

$\cos x+2\cos 2x=1$

Практическое занятие 27
Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач. Размещения, сочетания и перестановки

Цель: освоить методы решения задач на расчет количества выборок

Теоретическая часть

Комбинаторика — часть математики, которая посвящена решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами, т.е. комбинаторика решает задачи выбора элементов из конечного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке.

Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоев тогдашнего общества большое место занимали азартные игры (карты, кости). Широко были распространены лотереи. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр: сколькими способами можно получить данное число очков, бросая 2 или 3 кости или сколькими способами можно получить 2-ух королей в некоторой карточной игре. Эти и другие проблемы азартных игр являлись движущей силой в развитии комбинаторики и далее в развитии теории вероятностей.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Он составил таблицы (числа способов выпадения k очков на r костях). Однако, он не учел, одна и та же сумма очков может выпасть различными способами, поэтому его таблицы содержали большое количество ошибок.

Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские математики Блез Паскаль и Ферма. Исходным пунктом их исследований были так же проблемы азартных игр.

Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Я. Бернулли, Г. Лейбница, Л. Эйлера. Однако, и в их работах основную роль играли приложения к различным играм.

Сегодня комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний, для составления планов производства и реализации продукции и т.д. [2]

Размещениями из n – элементов по m – элементов $(m \le n)$ называются комбинации, составленные из данных n – элементов по m – элементов, которые отличаются друг от друга либо самими элементами либо порядком элементов.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр от 1…9?

Решение.

$$A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Перестановками из n – элементов называется число размещений из этих n – элементов по n – элементов.

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$$

Пример 2. Сколькими способами можно расставить 5 книг на полке?

Решение.

$$P_n = 5! = 120$$

Сочетаниями из n – элементов по m – элементов называются комбинации составленные из данных n – элементов по m – элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Пример 3. В группе 30 студентов. Для сдачи зачета их необходимо разбить на три группы. Сколькими способами это можно сделать?

$$n = 30$$

m=10

$$C_{30}^{10} = \frac{30!}{10!20!} = 30045015$$

Контрольные вопросы

1. Обозначьте цели комбинаторики.
2. Что называется числом сочетаний из n элементов по m?
3. Что называется числом размещений из n элементов по m?
4. Что называется перестановкой из n элементов?

Практическая часть

1. Сколькими способами можно в группе из 25 человек направить 4 студента на научно – практическую конференцию?
2. Десять студентов обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?
3. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг из семи различных по цвету отрезов материи?
4. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было выполнять переводы с любого из пяти языков на любой из них?
5. Вычислите: C_{15}^{13}
6. Вычислите: C_{18}^{14}
7. Вычислите: 5! + 6!
8. Найдите число размещений из 10 элементов по 4.
9. Вычислите: $A_7^3 + A_6^3 + A_5^3$
10. Тридцать студентов обменялись фотокарточками. Сколько всего было фотокарточек?
11. Сколькими способами можно из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?
12. Решите уравнение: $A_7^3 = 42x$
13. Вычислите значение выражения: $\frac{10!-8!}{89}$
14. Вычислите значение выражения: $\frac{5!+6!}{4!}$
15. Сколькими способами можно составить список из десяти человек?

Практическое занятие 28

Классическое определение вероятности. Вычисление вероятностей.

Цель: освоить методы вычисления вероятностей событий

Теоретическая часть

Вероятность события А равна отношению числа случаев благоприятствующих событию А к числу всех равновозможных из несовместных случаев:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B) = P(A) + P(B)

Условной вероятностью P(A/B) события A относительно события B, так если вероятность события B не равна нулю, называется отношение вероятности произведения событий A и B к вероятности события B:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Вероятность совместного наступления двух событий равна вероятности одного из них умноженной на условную вероятность другого: $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)$

Пример 1. В коробке 12 шаров, из них 5 белых и 7 черных. Из коробки вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.
Решение.

A – событие, состоящее в том, что первый шар белый

B – второй шар белый

Вычислим: P(A)=$\frac{5}{12}$

Вычислим P(B/A). Найдем вероятность того, что второй шар будет белый при условии, что первый шар белый. P(B/A)=$\frac{4}{11}$

Таким образом, $P(A \cdot B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение вероятности событий
2. Дайте определение условной вероятности
3. Напишите формулу сложения вероятностей
4. Напишите формулу умножения вероятностей

Практическая часть

1. Вероятность получения выпускником одного места работы равна 0,3, вероятность получения другого места работы равна 0,1. Какова вероятность получения хотя бы одного места работы?

2. Из трех маршрутов трамваев № 8, № 10 и № 15 для служащего попутными являются маршруты № 8 и №10. Вычислите вероятность того, что к остановке первым подойдет трамвай попутного для него номера, если по линиям маршрутов № 8, № 10 и № 15 курсируют соответственно 7, 9 и 12 вагонов. Протяженность маршрутов считается одинаковой.

3. Консультационная фирма претендует на два заказа от двух крупных корпораций. Эксперты фирмы считают, что вероятность получения заказа в первой корпорации равна 0,45, а у второй равна 0,9. Какова вероятность, что фирма получит оба заказа?

4. В коробке 24 шара, из них 10 белых и 14 черных. Из коробки вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

5. У продавца на рынке 60 арбузов, из которых 50 спелых. Покупатель выбирает два арбуза. Какова вероятность, что выбранные арбузы спелые?

Практическое занятие 29
Корни уравнений. Равносильность уравнений. Преобразование уравнений

Цель: рассмотреть понятие равносильности уравнений и равносильные преобразования уравнений.

Необходимо обсудить принципиальные вопросы, связанные с решением уравнений с одной переменной: равносильные уравнения и равносильные преобразования уравнений, посторонние корни и потеря корней в уравнениях.

Определение 1. Два уравнения с одной переменной *Fix)* = *G(X)* И *P(x)* = *H(X)* называют *равносильными,* если множества их решений совпадают. Другими словами, два уравнения будут *равносильными,* если они *имеют одинаковые корни* или если оба уравнения *не имеют корней*.

Пример 1.

А) Уравнения *X* - 3 = 0 и log3X = 1 *равносильны,* т. к. оба имеют единственный корень *X* = 3.

Б) Уравнения *X2* + 1 = 0 и Ig(|x| + 4) = 0 *равносильны,* т. к. каждое из них корней не имеет.

Определение 2. Если каждый корень уравнения *Fix)* = *G(X)* (1) является корнем уравнения *P(x)* = *H(X)* (2), то уравнение (2) называют следствием уравнения (1).

Пример 2.

А) Уравнение *X* - 3 = 0 имеет единственный корень x = 3, который является также корнем уравнения *X2* - *5x* + 6 = 0 (второй корень этого уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств квадратного уравнения jc = 2). Поэтому уравнение *X2* - *5x* + 6 = 0 является следствием уравнения *X* - 3 = 0.

Б) Уравнение *X2* - *4x* + 3 = 0 имеет корни jci = 3 и лг2 = 1, уравнение *X2* - *5x* + 6 = 0 имеет корни дгз = 3 и *X4* = 2 (т. е. оба уравнения имеют только один общий корень Jc = 3). Поэтому ни одно из уравнений не является следствием другого.

Очевидно, что два уравнения *равносильны* тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

При решении любых уравнений используется стандартная схема: с помощью преобразований *исходное уравнение* заменяется *более простым* (как правило, линейным или квадратным), которое затем решают.

Пример 3.

Показательное уравнение 7 ~2 = 72x_| заменяем иррациональным уравнением V3x-2 = *2x* -1. После возведения в квадрат обеих частей уравнения получаем квадратное уравнение: 3x-2 = (2x-1)2 или 3 0 = 4x2 -7x+3.

Корни этого уравнения *X* = 1 и *X2* = — являются также корнями исходного показательного уравнения.

Разумеется, идеальными являются такие преобразования, которые приводят к *равносильным уравнениям*. В этом случае окончательное уравнение имеет те же корни, что и исходное. Если преобразования приводят к *уравнениям-следствиям,* то полученное уравнение может иметь и те корни, которые не имеет исходное уравнение *(посторонние корни)***.** Но все корни исходного уравнения сохраняются, т. е. *потери корней не происходит* (могут лишь появиться посторонние корни).

В идеале решение уравнения осуществляется в три этапа.

Первый этап - технический. Проводится цепочка преобразований от исходного до самого простого, которое затем решают.

Второй этап - анализ решений. Анализируются выполненные преобразования. Выясняют, все ли такие преобразования являются равносильными.

Третий этап - проверка. Если некоторые преобразования могут привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Практическое занятие 30

Основные приемы решения уравнений. Решение систем уравнений.

Методы решения показательных уравнений

1. Простейшие показательные уравнения

Тип уравнения	Вид уравнения	Метод решения		
1	$a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$	$f_1(x) = f_2(x)$		
2	$a^{f(x)} = b$	b = a	$b \neq a$ b>0	$b \neq a$ $b \leq 0$
		$a^{f(x)} = a^1$ f(x) = 1	f(x) = $\log_a b$	Решений нет

Пример 1. *Решите уравнение*: $3^{4x-5} = 3^{x+4}$.

Решение. $3^{4x-5} = 3^{x+4} \Leftrightarrow 4x - 5 = x+4 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x = 3$.

Ответ: 3

Пример 2. *Решите уравнение:* $2^{x-4} = 3$.

Решение.

$2^{x-4} = 3 \Leftrightarrow x - 4 = \log_2 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3 + 4 \Leftrightarrow x = \log_2 3 + \log_2 16 \Leftrightarrow x = \log_2 48$.

Ответ: $\log_2 48$.

Пример 3. *Решите уравнение*: $7^{x^2-3x} = -7$.

Решение. $7^{x^2-3x} = -7$, решений нет, так как $7^{x^2-3x} > 0$ для x R.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

2. Методы преобразования показательных уравнений к простейшим.

а) Метод уравнивания оснований.

Пример 1. *Решите уравнение*: $27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$.
Решение.
$27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 3^3\, 3^{4x-9} - (3^2)^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 3^{3+(4x-9)} - 3^{2(x+1)} = 0 \Leftrightarrow 3^{4x-6} - 3^{2x+2} = 0$
$\Leftrightarrow 3^{4x-6} = 3^{2x+2} \Leftrightarrow 4x-6=2x+2 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x=4.$

Ответ: 4.

Пример 2. *Решите уравнение*: $2^{2x} \cdot 3^x \cdot 5^x - 60^{4x-15} = 0$.
Решение.
$2^{2x} \cdot 3^x \cdot 5^x - 60^{4x-15} = 0 \Leftrightarrow (2^2)^x \cdot 3^x \cdot 5^x = 60^{4x-15} \Leftrightarrow 4^x 3^x 5^x = 60^{4x-15} \Leftrightarrow (4 \cdot 3 \cdot 5)^x = 60^{4x-15} \Leftrightarrow 60^x = 60^{4x-15} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=4x-15 \Leftrightarrow 3x=15 \Leftrightarrow x=5.$

Ответ: 5.

b) Уравнения, решаемые разложением на множители.
Пример 1. *Решите уравнение*: $x \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x + 8x-16$.
Решение.
$x \cdot 2^x = 2\times2^x + 8x-16 \Leftrightarrow x2^x - 2\times2^x = 8 \cdot (x-2) \Leftrightarrow 2^x (x-2) - 8 \cdot (x-2) \Leftrightarrow (x-2) \cdot (2^x - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2^x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=2^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{2; 3\}$

Пример 2 . *Решите уравнение*: $5^{2x} - 7^x + 5^{2x} * 35 + 7^x * 35 = 0$
Решение.
$5^{2x} - 7^x + 5^{2x} * 35 + 7^x * 35 = 0 \Leftrightarrow (5^{2x} - 7^x) - (5^{2x} * 35 - 7^{2x} * 35) = 0 \Leftrightarrow (5^{2x} - 7^{2x}) - 35 * (5^{2x} - 7^{2x}) = 0 \Leftrightarrow (5^{2x} - 7^{2x}) * (1-35) = 0 \Leftrightarrow (5^{2x} - 7^{2x}) * (-34) = 0 \Leftrightarrow$
$(5^2)^x = 7^x \Leftrightarrow — = 1 \Leftrightarrow — = 1 \Leftrightarrow — = — = x = 0$

Ответ: 0.

c) Уравнения, которые с помощью подстановки $\alpha^{f(x)} = t$, $t>0$ преобразуются к квадратным уравнениям (или к уравнениям более высоких степеней).
Пусть $A \cdot \alpha^{2f(x)} + B \cdot \alpha^{f(x)} + C = 0$, где A, B, C - некоторые числа. Сделаем замену: $\alpha^{f(x)} = t$, $t>0$, тогда $A \cdot t^2 + B \cdot t + C = 0$
Решаем полученное уравнение, находим значения t, учитываем условие $t > 0$, возвращаемся к простейшему показательному уравнению $\alpha^{f(x)} = t$, решаем его и записываем ответ.

Пример 1 . *Решите уравнение*: $2^{2+x} - 2^{2-x} = 5$.
Решение.
$2^{2+x} - 2^{2-x} = 5 \Leftrightarrow 2^2 \qquad 2^x - — = 15 \Leftrightarrow 4 \qquad (2^x)^2 - 4 = 15 \cdot 2^x$

Делаем замену $t = 2^x$, $t > 0$. Получаем уравнение $4 \cdot t^2 - 4 = 15t \Leftrightarrow 4t^2 - 15t - 4=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-\frac{1}{4} \end{array}\right.$, $t = -\frac{1}{4}$ не удовлетворяет условию $t > 0$.
Вернемся к переменной x:

$2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x=2.$

Ответ: 2

Пример 2. Решите уравнение: $5^{2x-3} - 2\cdot 5^{x-2} = 3.$

Решение.

$5^{2x-3} - 2\cdot 5^{x-2} = 3 \Leftrightarrow 5^{2\cdot(x-2)+1} - 2\cdot 5^{x-2} = 3 \Leftrightarrow 5\cdot(5^{x-2})^2 - 2\cdot 5^{x-2} - 3 = 0.$

Делаем замену: $5^{x-2} = t,\ t > 0$, тогда $(5^{x-2})^2 = t^2$. Получаем уравнение:

$5\cdot t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{3}{5} \\ t = 1 \end{array}\right.$, $t = -\frac{3}{5}$ не удовлетворяет условию $t > 0$.

Вернемся к переменной Х: $5^{x-2} = 1 \Leftrightarrow 5^{x-2} = 5^0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Ответ: 2.

d) Уравнения, левая часть которых имеет вид

$A\alpha^{kx}\alpha^{nx} + Bb^{mx} + Cb^{nx}$, где $k, m \in N$, $k + m = n$

Для решения уравнения такого типа необходимо обе части уравнения разделить либо на α^{nx}, либо на b^{nx} и получится уравнение типа с).

Пример 1. *Решите уравнение*: $2\cdot2^{2x} - 5\cdot 6^x + 3\cdot3^{2x} = 0.$

Решение.

$2\cdot2^{2x} - 5\cdot 6^x + 3\cdot3^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot3^x + 3\cdot3^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{5\cdot3^x\cdot2^x}{3^{2x}} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 3 = 0$

Пусть $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $t>0$, тогда $2\cdot t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ t = 1 \end{array}\right.$, оба значения t удовлетворяют условию $t > 0$. Вернемся к переменной x:

$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{-1; 0\}$

Пример 2. *Решите уравнение*: $8^x + 18^x - 2\cdot27^x = 0$.

Решение.

$8^x + 18^x - 2\cdot27^x = 0 \Leftrightarrow (2^3)^x + (2\cdot3^2)^x - 2\cdot(3^3)^x = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} + 2^x\cdot 3^{2x} - 2\cdot3^{3x} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x\cdot3^{2x}}{3^{3x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 2 = 0.$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t$, $t>0$, тогда $t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t^3 - 1) + (t - 1) = 0 \Leftrightarrow (t-1)\cdot(t^2 + t + 1) + (t - 1) \Leftrightarrow (t - 1)\cdot(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t^2 + t + 2 = 0 \\ D = -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1.\ (t>0)$

Вернемся к переменной x: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \Leftrightarrow x = 0$.

Ответ: 0.

К данному типу уравнений относятся уравнения, левая часть которых имеет вид $A\cdot\alpha^{n\cdot x}+B\cdot b^{n\cdot x}+C$*, где A, B, C - некоторые числа, причем* $\alpha\cdot b=1$.
Уравнения такого типа решаются с помощью подстановки:
$\alpha^{n\cdot x}=t$*, тогда* $b^{n\cdot x}=\frac{1}{t}$.

Пример 3. *Решите уравнение:* $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$.
Решение.
$(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$.
Заметим, что произведение оснований степени равно единице:
($(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=1$. Поэтому можно ввести новую переменную:
$t=(2+\sqrt{3})^x$, тогда $(2-\sqrt{3})^x=\frac{1}{t}$, причем $t>0$. Получим уравнение:
$t+\frac{1}{t}=4\Leftrightarrow t^2-4t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2+\sqrt{3}\\ t=2-\sqrt{3}\end{array}\right.$, оба корня удовлетворяют условию : $t>0$.
Вернемся к переменной x:
$$\left[\begin{array}{l}(2+\sqrt{3})^x=2+\sqrt{3}\\ (2+\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(2+\sqrt{3})^x=(2+\sqrt{3})^1\\ (2+\sqrt{3})^x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ (2+\sqrt{3})^x=(2+\sqrt{3})^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right..$$

Ответ: $\{1;-1\}$.

e) Уравнения, имеющие вид $A\cdot a^m=B\cdot b^m$.
Для решения необходимо обе части уравнения разделить либо на a^m*, либо на* b^m.
В результате получается простейшее уравнение.

Пример 1. *Решите уравнение*: $7^x=5^x$.
Решение.
$7^x=5^x \Leftrightarrow \frac{7^x}{5^x}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^x=\left(\frac{7}{5}\right)^0 \Leftrightarrow x=0$.

Ответ: 0.

Пример 2. *Решите уравнение*: $4^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$.
Решение.
$4^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}\Leftrightarrow 4^{x-2}=(3)^{x-2}.\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{x-2}=1\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{x-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2.$

Ответ: 2.

f) *Метод, основанный на использовании свойства монотонности показательной функции .*
Пример 1. Решите уравнение: $5^x+7^x=12^x$.
Решение.
Заметим, что при x=1 уравнение обращается в тождество. Следовательно, x=1 - корень уравнения. Перепишем уравнение в виде
$\left(\frac{5}{12}\right)^x+\left(\frac{7}{12}\right)^x=1$ (*)

Так как при основании, меньшем единицы, показательная функция убывает на R, то при x <1 левая часть уравнения (*) больше единицы, то есть

$$(\frac{5}{12})^x + (\frac{7}{12})^x > 1$$

Если $x > 1$, то левая часть уравнения меньше единицы, то есть

$$(\frac{5}{12})^x + (\frac{7}{12})^x < 1$$

Поэтому, других корней, кроме x=1, уравнение $5^x + 7^x = 12^x$ не имеет.

Ответ: 1.

Практическое занятие 31
Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств

Цель: научиться применять свойства функций и их графиков при решении уравнений и неравенств.

Теоретическая часть

Наиболее общие методы решения уравнений любых видов:

1. Метод замены уравнения h(f(x))= h(g(x)) уравнением f(x)=g(x).
2. Метод разложения на множители.
3. Метод введения новой переменной.
4. Функционально-графический метод.

Рассмотрим первый метод: метод замены уравнения h(f(x))= h(g(x)) уравнением f(x)=g(x). Этот способ основан на монотонности функции h(x).

Если функция h(x) монотонная, то она принимает каждое свое значение только один раз. Тогда от уравнения h(f(x))= h(g(x)) можно перейти к простому f(x)=g(x).

Если функция h(x) немонотонная, то такой метод применять нельзя, т.к. возможна потеря корней. Рассмотренный метод применяется в случае монотонных функций h(x), например, при решении:

– показательного уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
  при переходе к уравнению f(x)=g(x);
– логарифмического уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)\ (a > 0,\ a \neq 1)$
– при переходе к уравнению f(x)=g(x);
– иррационального уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$
  при переходе к уравнению f(x)=g(x)

Рассмотрим второй метод - метод разложения на множители.

Он заключается в том, что уравнение f(x)g(x)h(x)=0 заменяют совокупностью уравнений f(x)=0, g(x)=0, h(x)=0. Решив эти уравнения, вычислив корни, обязательно их нужно проверить.

Метод введения новой переменной.

Суть его заключается в следующем:

если уравнение $f(x)=0$ имеет вид (или может быть приведено к виду) $p(g(x))$, то вводят новую переменную $u= g(x)$, получают уравнение $p(u)=0$, решают его и находят корни (u_1, u_2,… $_n$). Возвращаются к старой переменной и получают совокупность уравнений

$$g(x) = u_1; \quad g(x) = u_2; \ \ldots; \quad g(x) = u_n,$$

Решая эту совокупность, находят корни данного уравнения.

Функционально-графический метод решения уравнения f(x)=g(x).

Суть этого метода такова: строят графики функций y= f(x) и y = g(x). Затем находят точки пересечения этих графиков, определяют их абсциссы. Они и являются корнями данного уравнения. Этот метод позволяет определить число корней, их приближенные, а иногда и точные значения.

Не всякое уравнение вида f(x)=g(x) в результате преобразований может быть приведено к уравнению того или иного стандартного вида, для которого подходят обычные методы решения. В таких случаях имеет смысл использовать такие свойства функций f(x) и g(x) ,как

- монотонность,
- ограниченность,
- четность,
- периодичность
- если одна из функций возрастает, а другая убывает на определенном промежутке, то уравнение f(x) = g(x) не может иметь более одного корня, который, в принципе, можно найти подбором.
- если функция f(x) ограничена сверху, а функция g(x) – снизу, так что $f(x)_{max}=A$ $g(x)_{min}=A$, то уравнение f(x)=g(x) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x)=A \\ g(x)=A \end{cases}$$

Практическая часть

Пример 1. Решить уравнение $(3x – 7)^5= (2x+3)^5$.

Решение.

Так как функция $h(x)=x^5$ монотонная (возрастающая), то данное уравнение равносильно уравнению

3x – 7=2x+3 3x- 2x=3+7: x=10.

Выполнили равносильные преобразования, проверку делать не нужно.

Ответ:10

Пример 2. Решить уравнение $(8- 2x)^2=(x^2+5)^2$.

Решение.

Так как функция $h(x)=x^2$ немонотонная, то применять этот метод нельзя.

Пример 3. Решить уравнение $\log_3(x+1)+ \log_3(x+3)=1$.

Решение.

ОДЗ задается системой неравенств: $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0; \\ x>-1 \end{cases}$

Воспользуемся свойством логарифма и $1=\log_3 3$, получим уравнение
$\log_3(x+1)(x+3)=\log_3 3$.

Так как функция $h(x)=\log_3 x$ монотонная (возрастающая), то данное уравнение равносильно уравнению $(x+1)(x+3)=3$

Решая квадратное уравнение $x^2+4x=0$, получим корни $x_1=0, x_2=-4$.

$0 \in$ О.Д.З.

$-4 \notin$ О.Д.З. Ответ: 0

Пример 4. Решить уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

Решение.

ОДЗ уравнения множество всех действительных чисел.

Получаем:

$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0$, или

$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0$, или

$\sin 2x(2\cos x + 1) = 0$

Тогда данное уравнение сводится к совокупности уравнений:

1) $\sin 2x=0$, $2x=\pi n$(где $n \in Z$) и $x=\frac{\pi}{2}n$, (где $n \in Z$);

2) $2\cos x + 1 = 0, x=\pm\arccos^{-\frac{1}{2}+2\pi k}$,(где $k \in Z$)

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}n$, (где $n \in Z$); $x=\pm\arccos^{-\frac{1}{2}+2\pi k}$, (где $k \in Z$).

Пример 5. Решить уравнение $4^x-10\cdot 2^{x-1}=24$.

Решение.

Заменим $4^x=2^{2x}$, $10\cdot 2^{-1}=5$, получим: $2^{2x}-5\cdot 2^x-24=0$

Заменим $2^x=t$, $t>0$, получим $t^2-5t-24=0$.

$t_1=-3$, $t_2=8$.

Корень $t_1=-3$ является посторонним, т.к. не удовлетворяет условию, $t>0$

Возвращаемся к замене $2^x=t$, получим $2^x=8$, $x=3$.

Ответ: 3

Пример 6. Решить уравнение $\log^2_5 x-\log_{\sqrt{5}} x-3=0$.

Решение.

Перейдем во втором слагаемом к основанию 5 и сделаем замену переменной $t=\log_5 x$,

тогда $\log_{\sqrt{5}} x=\frac{\log_5 x}{\log_{\sqrt{5}} 5}=\frac{t}{\frac{1}{2}}=2t$.

Теперь данное уравнение перепишется в виде $t^2-2t-3=0$.

$t_1=3$,

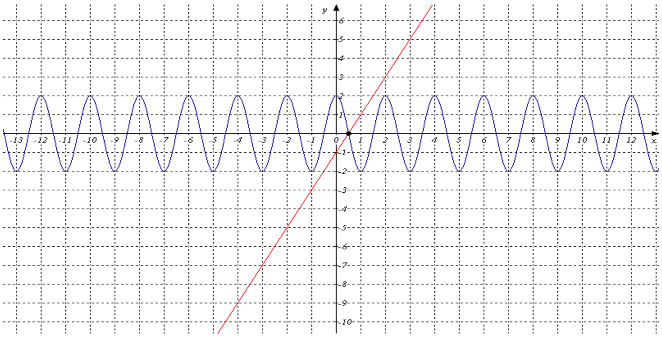
$t_2=-1$.

Решая уравнения замены $\log_5 x=3$ и $\log_5 x=-1$,

Находим $x=5^3=125$ и $x=5^{-1}=0{,}2$

Ответ: 125; 0,2

Пример 7. Решить уравнение *2cos πx = 2x - 1*



Построим в одной системе координат графики функций y=2cos πx и y=2x - 1. Картинка.
Точка пересечения графиков (0,5;0)
Значит, уравнение имеет один корень x=0,5.

Ответ: x=0,5.

Пример 8. Решить уравнение **cos** $\frac{x^2-8x}{5}$ **= x^2+1**

Решение

Данное уравнение рационально решать функциональным методом. Рассмотрим функцию *f(x)*= ***cos*** $\frac{x^2-8x}{5}$ В силу ограниченности функции косинуса. Наибольшее значение функции f(x) равно A=1 Очевидно, функция g(x)= **x^2**+1 наименьшее значение равно A=1.

Поэтому данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\frac{x^2-8x}{5} = 1 \\ x^2+1=1 \end{cases}$$

Очевидно, что корень второго уравнения равен x=0.

Проверка x=0 удовлетворяет и первому уравнению. Следовательно, система уравнений (а также исходное уравнение) имеет единственный корень x=0.

Ответ: 0.

Пример 9. Решить неравенство
a. $x^5 > 3 - 2x$;
b. $x^5 \le 3 - 2x$.

Решение

a. Чтобы выполнялось неравенство, график функции $y = x^5$ должен располагаться над прямой $y = 3 - 2x$ (рис. 1). Это выполняется при $x > 1$.

b. В этом случае, наоборот, парабола $y = x^5$ должна находиться под прямой. Это выполняется при $x \le 1$.

Ответ: a. $x > 1$;
b. $x \le 1$.

Пример 10. Решить неравенство $x^{-2} > 2x - 1$

Решение

Построим графики функций *y* = — и *y* =2*x* - *1*. Найдем корень уравнения — При *x* < *0* нет решений. При *x* > *0* существует одно решение *x* = *1*. Чтобы выполнялось неравенство — гипербола *y* = — должна располагаться над прямой

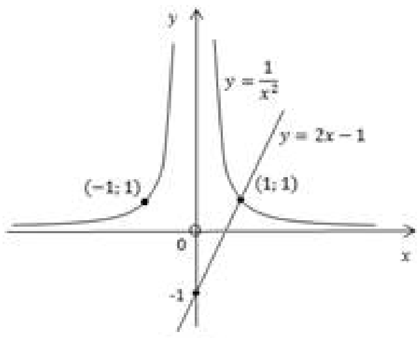


Рис. 2

$y = 2x - 1$. Это выполняется при $0 < x < 1$ и $x < 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

Пример 11. Решить графически неравенство: a. $x^3 \le \sqrt{x}$;

b. $x^3 \ge \sqrt{x}$.

Решение

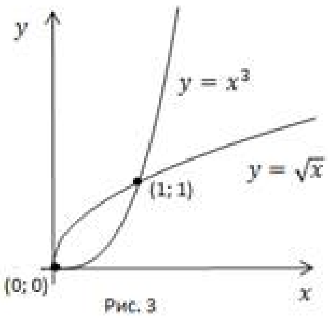


Рис. 3

Область определения: $x \ge 0$.

Построим графики функций $y = x^3$ и $y = \sqrt{x}$ для $x \ge 0$.

a. График функции $y = x^3$ должен располагаться под графиком $y = \sqrt{x}$. Это выполняется при $x \in [0, 1]$.

b. График функции $y = x^3$ расположен над графиком $y = \sqrt{x}$ при $x \ge 1$. Но т. к. в условии имеем нестрогий знак, важно не потерять изолированный корень $x = 0$.

Ответ: a. $x \in [0, 1]$.

b. $x \in [1; +\infty; 0] \cup x = 0$.

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования / М.И. Башмаков. – М.: Издательский центр «Академия», 2014 г.
2. Элементы комбинаторики - Теория вероятности. www. sites.google.com›…teoriaveroyatnosti…kombinatoriki
3. Продуктивное образование для всех http://bashmakov.su/index/kompjuterizacija/ Материал для 10-11 классов

СОДЕРЖАНИЕ